

Інститут ядерних досліджень
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Шаульський Костянтин Андрійович

УДК 539.1.08, 539.12, 621.3.038.616, 539.1.07

ДИСЕРТАЦІЯ

КВАНТОВІ РЕЛЯТИВІСТСЬКІ МЕТОДИ ОПISУ ЯДЕРНИХ ПРОЦЕСІВ У КОМПАКТНИХ ЗОРЯХ

104 Фізика та астрономія

10 Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 К.А. Шаульський

Науковий керівник

Майданюк Сергій Петрович,

доктор фізико-математичних наук

Київ - 2025

Анотація

Шаульський К.А. Квантові релятивістські методи опису ядерних процесів у компактних зорях. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 — Фізика та Астрономія. — Інститут ядерних досліджень Національної академії наук України, відділ теорії ядерних процесів. — Київ, 2025.

В дисертації досліджено процеси злиття атомних ядер в кристалічних ґратках компактних зір — пікноядерних реакціях — за допомогою нового формалізму на основі методу багаторазових внутрішніх відбиттів. Також було побудовано нові моделі для дослідження гальмівного випромінювання при розсіянні протона на дейтроні та нуклонів на атомних ядрах в середовищі компактних зір.

В розділі 1 викладено теоретичні засади методу багаторазових внутрішніх відбиттів (методу БВВ) та його модифікація для дослідження пікноядерних реакцій у кристалічних ґратках в компактних зорях. Виконано порівняння з мікроскопічними та напівкласичними методами та наведено обґрунтування переваги саме методу багаторазових внутрішніх відбиттів для пікноядерних реакцій. Вперше було застосовано повністю квантовий підхід до опису пікноядерних реакцій і отримано нові оцінки для швидкостей таких реакцій, адже метод БВВ дозволяє врахувати квантові потоки у внутрішній області потенціалу, де наближені методи вже не є застосовними для енергій, при яких виникають пікноядерні реакції. Також наведені результати розрахунків по розробленій моделі, з оцінками коефіцієнтів проникності бар'єра та швидкостей пікноядерних реакцій. Оцінки були порівняні з іншими методами, за допомогою яких вивчали пікноядерні реакції раніше. Розроблена модель дозволяє розрахувати і ймовірності утворення складених ядер при пікноядерних реакціях. Такі ймовірності раніше досліджувалися за допомогою підходів на основі енергії нульових коливань.

В розділі 2 побудовано формалізм опису процесу розсіяння протона на дейтроні на основі дво- та три-кластерних моделей. Досліджено вплив осциляторної довжини, що описує дейтрон в кластерній моделі, а також різні нуклон-нуклонні потенціали взаємодії між нуклонами в дейтроні, та між протоном та дейтроном, на розглянутий процес. Досліджено гальмівне випромінювання, що виникає в такому процесі та розрахований його спектр. Розрахований спектр гальмівного випромінювання перевірено на наявних експериментальних даних для узгодження моделі. Досліджено вплив перерахованих параметрів моделі на переріз гальмівного випромінювання, що супроводжує процес розсіяння протона на дейтроні.

В розділі 3 розроблено новий формалізм для опису атомних ядер в середовищі компактних зір — білих карликів та нейтронних зір. Теоретичну модель побудовано на основі моделі деформованих осциляторних оболонок, яка дозволяє з високою точністю розрахувати енергію зв'язку ядер та їх деформації. Формалізм модифіковано для врахування впливу матерії компактних зір на атомні ядра. Досліджено вплив середовища на енергію зв'язку низки ізотопів в білих карликах та нейтронних зорях. Досліджено процес розсіяння нуклонів на атомних ядрах в моделі деформованих осциляторних оболонок та гальмівне випромінювання, що супроводжує такі процеси. Розраховано вплив середовища компактних зір на спектри гальмівного випромінювання при процесах розсіяння нуклонів на атомних ядрах в матерії компактних зір.

Ключові слова: метод багаторазових внутрішніх відбиттів, пікноядерні реакції, компактні зорі, білий карлик, нейтрона зоря, гальмівне випромінювання, протон-дейтронне розсіяння, три-кластерна модель.

Abstract

Shaulskyi K.A. Quantum relativistic methods of description of nuclear processes in the compact stars. — Qualifying scientific work on the rights of a manuscript.

The dissertation for obtaining an academic degree of a Doctor of Philosophy (a PhD degree) on the Programme Subject Area 104 — Physics and astronomy. — Institute for Nuclear Research, National Academy of Sciences of Ukraine, Nuclear Processes Department. — Kyiv, 2025.

The dissertation investigates the processes of atomic nuclei fusion in the crystalline lattices of compact stars — pycnonuclear reactions — using a new formalism based on the method of multiple internal reflections (MIR). New models were also developed to study bremsstrahlung radiation in proton-deuteron scattering and nucleon-nucleus scattering in the environment of compact stars.

Chapter 1 presents the theoretical foundations of the method of multiple internal reflections (MIR method) and its modification for studying pycnonuclear reactions in crystalline lattices within compact stars. A comparison with microscopic and semi-classical methods is performed, and the advantages of the MIR method for pycnonuclear reactions are substantiated. For the first time, a fully quantum approach was applied to describe pycnonuclear reactions, yielding new estimates for the reaction rates. The MIR method allows the inclusion of quantum fluxes in the inner region of the potential, where approximate methods are no longer applicable at the energies relevant to pycnonuclear reactions. The results of calculations based on the developed model are provided, including estimates of barrier penetrability coefficients and reaction rates. These estimates were compared with those obtained by other methods previously used to study pycnonuclear reactions. The developed model also enables the calculation of the probabilities of compound nucleus formation during pycnonuclear reactions. Such probabilities were previously studied using approaches based on zero-point energy.

Chapter 2 develops a formalism for describing the process of proton-deuteron scattering based on two- and three-cluster models. The influence of the oscillator length (describing the deuteron in the cluster model) is studied, along with various nucleon-nucleon interaction potentials within the deuteron and between the proton and the deuteron, on the considered process. The bremsstrahlung radiation arising in this process is investigated, and its spectrum is calculated. The calculated bremsstrahlung spectrum is verified against available experimental data to validate the model. The influence of the aforementioned model parameters on the bremsstrahlung cross section accompanying proton-deuteron scattering is analyzed.

Chapter 3 presents the development of a new formalism for describing atomic nuclei in the environment of compact stars — white dwarfs and neutron stars. The theoretical model is based on the deformed oscillator shell model, which allows high-precision calculations of nuclear binding energies and their deformations. The formalism is modified to account for the influence of compact star matter on atomic nuclei. The effect of the environment on the binding energy of a number of isotopes in white dwarfs and neutron stars is studied. The process of nucleon scattering on atomic nuclei is investigated using the deformed oscillator shell model, along with the bremsstrahlung radiation accompanying such processes. The influence of the compact star environment on the bremsstrahlung spectra during nucleon-nucleus scattering in compact star matter is calculated.

Keywords: multiple internal reflections, pycnonuclear reactions, compact stars, white dwarf, neutron star, bremsstrahlung emission, proton-deuteron scattering, three-cluster model.

Список публікацій здобувача освіти за темою дисертації
Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати
дисертації

1. S. P. Maydanyuk, K. A. Shaulskyi, *Quantum design in study of pycnonuclear reactions in compact stars*, Eur. Phys. J. 58, 220 (2022), DOI: <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-022-00870-z> (Q2, особистий внесок здобувача — розвинення моделі багаторазових внутрішніх відбиттів та її застосування для дослідження атомних ядер в середовищі компактних зір, доповіді на наукових конференціях)
2. К. А. Шаульський, С. П. Майданюк, *Квантові ефекти пікноядерних реакцій у компактних зорях: нові квазізв'язані стани та спектроскопія*, Nucl. Phys. At. Energy 24(2), 93 (2023), DOI: <https://doi.org/10.15407/jnpae2023.02.093> (Q4, особистий внесок здобувача — розробка моделі компактних зір й адаптація методу багаторазових внутрішніх відбиттів, написання статті)
3. S. P. Maydanyuk, G. Wolf, K. A. Shaulskyi, *Synthesis of elements in compact stars in pycnonuclear reactions with Carbon isotopes: Quasibound states versus states of zero-points vibrations*, Universe, 9(8), 354 (2023), DOI: <https://doi.org/10.3390/universe9080354> (Q1, особистий внесок здобувача — розробка моделі компактних зір для дослідження пікноядерних реакцій на основі методу багаторазових внутрішніх відбиттів, доповіді на наукових конференціях)
4. K. A. Shaulskyi, S. P. Maydanyuk, and V. S. Vasilevsky, *Structure of the deuteron from an analysis of bremsstrahlung emission in proton-deuteron scattering in cluster models*, Phys. Rev. C 110, 034001 (2024), DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.110.034001> (Q1, особистий внесок здобувача — аналітика та розрахунки хвильових функцій дейтрону, доповіді на наукових конференціях)
5. Sergei P. Maydanyuk, Ju-Jun Xie and Kostiantyn A. Shaulskyi, *Bremsstrahlung emission from nucleon-nucleus reactions in dense medium of compact stars*, Chinese Phys. C 49, 044105 (2025), DOI: <https://doi.org/>

10.1088/1674-1137/ada377 (Q1, особистий внесок здобувача — розробка моделі атомних ядер в щільному середовищі компактних зір, аналіз впливу середовища на енергію зв'язку ядер, аналіз перерізів гальмівного випромінювання, доповіді на наукових конференціях)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. С. П. Майданюк, К. А. Шаульський, *Спектроскопія пікноядерних реакцій у компактних зорях*, XXIX Щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАН України: тези доповідей (Київ, 26-30 вересня 2022 року). - Київ: Інститут ядерних досліджень НАН України, 2022. - 236 с. - С 28.
2. К. А. Шаульський, С. П. Майданюк, В. С. Василевський, *Гальмівне випромінювання у протон-дейтронному розсіянні та нуклон-нуклонні сили*, XXX Щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАН України: тези доповідей (Київ, 25-29 вересня 2023 року). - Київ: Інститут ядерних досліджень НАН України, 2023. - 246 с. - С 43.
3. Kostiantyn Shaulskyi, Sergei Maydanyuk, Victor Vasilevsky, *Bremsstrahlung emission in proton-deuteron scattering and nucleon-nucleon forces*, XIV Conference of Young Scientists "Problems of Theoretical Physics": Book of Abstracts (Kyiv, January 16-17, 2024). - Kyiv: Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 2024. - 24 p. - P 15.
4. К. А. Шаульський, С. П. Майданюк, В. С. Василевський, *Дослідження структури дейтрона з аналізу гальмівного випромінювання при протон-дейтронному розсіянні в кластерних моделях*, XXXI Щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАН України: тези доповідей (Київ, 27-31 травня 2024 року). - Київ: Інститут ядерних досліджень НАН України, 2024. - 223 с. - С 50.
5. К. А. Шаульський, С. П. Майданюк, *Гальмівне випромінювання в нуклон-ядерних реакціях у компактних зорях*, XXXII Щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАН України: тези доповідей (Київ, 26-30 травня 2025 року). - Київ: Інститут ядерних досліджень НАН України, 2025. - 209 с. - С 43.

Зміст

Вступ	11
1. Квантові ефекти пікноядерних реакцій у компактних зорях	16
1.1. Метод багаторазових внутрішніх відбиттів в описі ядерно-ядерного розсіяння з можливістю злиття	17
1.2. Застосування формалізму БВВ для пікноядерних реакцій в компактних зорях	23
1.3. Синтез елементів з ізотопів карбону в пікноядерних реакціях . .	25
1.4. Енергетичні спектри нульових коливань ядер у ґратках	32
1.5. Порівняння методу БВВ з ВКБ-наближенням для пікноядерних реакцій	39
1.6. Висновки до розділу 1	42
2. Гальмівне випромінювання при протон-дейтронному розсіянні	44
2.1. Використання дво- та три-кластерної моделей для опису $p + d$ системи	45
2.2. Гальмівне випромінювання в процесі розсіяння протона на дейтроні	51
2.3. Вплив параметрів моделей на гальмівне випромінювання в процесі $p + d$	60
2.4. Висновки до розділу 2	67
3. Вплив середовища компактних зір на спектр гальмівного випромінювання при розсіянні нуклонів на атомних ядрах	69
3.1. Модель деформованих осциляторних оболонок та її модифікація для опису атомних ядер в середовищі компактних зір	71

3.2. Опис компактних зір для модифікації моделі деформованих осциляторних оболонок	78
3.3. Модель гальмівного випромінювання при розсіянні нуклонів на атомних ядрах в компактних зорях	87
3.4. Висновки до розділу 3	94
Висновки	98
Список використаних джерел	102
А. Список публікацій здобувача освіти за темою дисертації	111

Вступ

Обґрунтування теми наукового дослідження

Основною темою наукового дослідження є розробка нових моделей для опису процесів, що відбуваються між атомними ядрами в компактних зорях. Компактні зорі — білі карлики та нейтронні зорі — є природними лабораторіями [1—3], де атомні ядра перебувають у екстремальних умовах [4, 5]. Дослідження атомних ядер в таких умовах є перспективним напрямком, про що свідчить велика кількість наукових публікацій в найбільш престижних журналах.

Вже розроблено багато моделей для опису структури атомних ядер у екстремальних умовах всередині зір. Так, вже побудовано багатонуклонні та кластерні об'єднані теорії ядра та ядерних реакцій [6—9], оболонкові моделі, колективні моделі, релятивістські теорії середнього поля (RMF) [10—21], *Ab initio calculations theory* [22], методи КХД опису ядер, кваркові моделі (кварк-мезонні моделі [23], потенціальні моделі).

Метою роботи є розробка нових моделей, які були б суто квантово-механічними і не використовували методи теорії збурень чи числових методів, які потребують наявності суперкомп'ютерів, як у [22]. Перспективним є метод багаторазових внутрішніх відбиттів [24, 25], який дозволяє рахувати коефіцієнти проникності бар'єрів при тунелюванні частинок за низьких енергій — за яких напівкласичні методи перестають працювати. А також розроблена модель дозволяє порахувати ймовірності утворення складених ядер та відповідні енергії.

Розроблені моделі на основі методу багаторазових внутрішніх відбиттів дозволять порахувати квантові ефекти, такі як: проникність бар'єрів при тунелюванні при пікноядерних реакціях, отримати оцінку швидкостей пікноядерних реакцій, що все ще є джерелом дискурсу [26].

Гальмівне випромінювання є ще одним джерелом інформації про ядерні сили в атомних ядрах. Експериментальні дані про гальмівне випромінювання, що супроводжує різні процеси, є потужним інструментом для дослідження структури атомних ядер та властивостей ядерних сил [27—32]. Моделі, розроблені для опису гальмівного випромінювання, яке супроводжує процеси досліджувані в земних лабораторіях, можливо адаптувати під умови всередині компактних зір. Подібна модифікація дозволяє оцінити вплив середовища зір на процеси та гальмівне випромінювання, що їх супроводжує.

Мета, завдання, об'єкт та предмет наукового дослідження

Мета дослідження — створення квантових моделей для опису ядерних процесів у компактних зорях та їх дослідження. В дисертаційній роботі досліджуються пікноядерні реакції в кристалічних ґратках нейтронних зір [33—35] та гальмівне випромінювання, що супроводжує процеси розсіяння протона на дейтроні [36] та нуклонів на атомних ядрах в середовищі компактних зір [37].

Завдання дослідження:

1. розробити теоретичну модель опису пікноядерних реакцій в середовищі компактних зір на основі методу багаторазових внутрішніх відбиттів; розрахувати коефіцієнти проникності бар'єра та швидкості пікноядерних реакцій; розрахувати ймовірності утворення складених ядер; порівняти отримані результати з попередніми оцінками;
2. розробити теоретичну модель опису процесу розсіяння протона на дейтроні та дослідити гальмівне випромінювання, що супроводжує даний процес; включити параметр, що описує дейтрон, в модель; дослідити вплив цього параметра на спектр гальмівного випромінювання;
3. розробити теоретичну модель опису атомних ядер, поміщених в щільне середовище компактних зір; дослідити гальмівне випромінювання в процесах розсіяння нуклонів на атомних ядрах в цих умовах; оцінити вплив густини середовища компактних зір на гальмівне випромінювання.

Об'єкт дослідження: взаємодії нуклонів та атомних ядер в середовищі компактних зір, квантові ефекти, що виникають при цих взаємодіях та методи їх опису. Компактні зорі. Пікноядерні реакції в щільному середовищі компактних зір. Гальмівне випромінювання, що супроводжує процеси розсіяння нуклонів на атомних ядрах в середовищі компактних зір.

Предмет дослідження: теоретичні моделі, що описують взаємодію атомних ядер та нуклонів в середовищі компактних зір. Моделі опису гальмівного випромінювання, що супроводжують різні процеси розсіяння нуклонів на атомних ядрах в середовищі компактних зір.

Методи наукового дослідження

У роботі використано методи емпіричного та теоретичного рівня дослідження. Головним методом є моделювання взаємодій атомних ядер в середовищі компактних зір. Моделювання ґрунтується на розв'язку задачі Шредінгера для атомних ядер в середовищі компактної зорі.

Для задачі з пікноядерними реакціями використовується метод багаторазових внутрішніх відбиттів, що є одним з методів розв'язку задачі тунелювання через бар'єр.

Для моделювання процесів в задачах з гальмівним випромінюванням використовується дво- та три-кластерні методи, а також модель деформованих осциляторних оболонок. Гальмівне випромінювання описується оператором народження гальмівного фотона під час процесу розсіяння частинок, що мають електричний заряд, електричний та магнітний моменти.

Для чисельних розрахунків за побудованими моделями використовується метод скінченних елементів та метод резонуючих груп. Результати розрахунків перевіряються за допомогою використання тестів математичного апарату квантової механіки, а де це можливо — шляхом порівняння з наявними експериментальними даними.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження

Вперше досліджено пікноядерні реакції за допомогою квантово-механічного опису. Метод багаторазових внутрішніх відбиттів дозволяє моделювати і розраховувати фізичні величини в областях та при енергіях, при яких інші методи квантової механіки (мікроскопічні чи квазікласичне ВКБ-наближення) перестають працювати. Такий підхід дозволив перерахувати швидкості пікноядерних реакцій в компактних зорях.

Вперше досліджено гальмівне випромінювання при протон-дейтронному розсіянні на основі дво- та три-кластерного формалізмів. Вперше показано вплив параметрів моделі, які описують дейтрон, на розраховані спектри гальмівного випромінювання в даному процесі.

Вперше досліджено гальмівне випромінювання при розсіянні нуклонів на атомних ядрах в середовищі компактних зір. Вперше досліджено вплив середовища нейтронної зорі на інтенсивність гальмівного випромінювання в процесах розсіяння нуклонів на атомних ядрах.

Теоретичне і практичне значення результатів дослідження

Нові представлені в дисертації моделі розширюють наявний теоретичний апарат для опису ядерних процесів при екстремальних умовах, що мають місце у компактних зорях.

Зокрема, за допомогою методу багаторазових внутрішніх відбиттів розроблено модель для опису пікноядерних реакцій в середовищі компактних зір. Побудована модель має перевагу над попередніми теоріями, які ґрунтувалися на квазікласичному наближенні, а саме має ширшу область застосування для енергій взаємодіючих атомних ядер в кристалічній ґратці компактних зір. За її допомогою було розраховано швидкості пікноядерних реакцій для ізотопів карбону ${}^X\text{C} + {}^X\text{C}$, де $X = 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24$. Формалізм також дозволяє дослідити процес злиття двох атомних ядер карбону через утворення складеного ядра і розрахувати його ймовірність. Модель можна використати

для інших ядер та їх ізотопів (оксигену, неону, кальцію, магнію, феруму), які присутні в кристалічних ґратках білих карликів та нейтронних зір.

Розроблено модель для опису гальмівного випромінювання в процесі розсіяння протона на дейтроні. Формалізм дозволив розрахувати спектр гальмівного випромінювання в залежності від параметрів моделі, які описують будову дейтрона та нуклон-нуклонну взаємодію. Аналіз показує, що вплив параметрів моделі на розраховані спектри гальмівного випромінювання збільшується зі збільшенням енергії пучка. Порівняння з наявними експериментальними даними показало високий збіг теоретично розрахованих перерізів гальмівного випромінювання з експериментом. Отримавши нові дані для гальмівного випромінювання при більших енергіях і порівнюючи їх з результатами розрахунків можна буде уточнити модель.

Модифіковано модель деформованих осциляторних оболонок для опису атомних ядер в щільному середовищі компактних зір. Формалізм дозволяє розрахувати вплив матерії зорі на енергію зв'язку атомного ядра. За допомогою моделі було досліджено процес розсіяння протонів та нейтронів на атомних ядрах в компактних зорях, та виконано розрахунки спектрів гальмівного випромінювання при цих процесах. Розрахунки показали, що вплив матерії білих карликів несуттєвий на перерізи гальмівного випромінювання. При моделюванні білих карликів використовувалися фізичні рівняння, які описують Сонце з високою точністю. Таким чином, побудована модель дозволяє аналізувати процеси розсіяння нуклонів на атомних ядрах та гальмівне випромінювання при цих процесах на Сонці. При цьому, згідно з розрахунками, вплив середовища нейтронних зір на процеси розсіяння нуклонів на атомних ядрах та гальмівне випромінювання при цих процесах колосальний.

Розділ 1.

Квантові ефекти пікноядерних реакцій у компактних зорях

У цьому розділі розроблена нова модель опису пікноядерних реакцій в середовищі компактних зір на основі методу багаторазових внутрішніх відбиттів (БВВ) [24, 25, 38—40].

На початку розділу окреслений загальний принцип методу багаторазових внутрішніх відбиттів для задачі розсіяння частинки на потенціальному бар'єрі довільної форми, також наведені його основні ідеї та принципи, необхідні для розрахунків амплітуд хвильової функції, коефіцієнтів проникності та відбиття та основні тести для перевірки цих розрахунків. Визначено ймовірності злиття ядер у такому підході.

Далі представлено узагальнення методу БВВ при описі пікноядерних реакцій в компактних зорях [1]. В цих реакціях злиття відбувається між атомними ядрами, які розташовані у сусідніх вузлах кристалічних ґраток нейтронних зір та білих карликів. Нова модель дозволяє розрахувати швидкості пікноядерних реакцій і порівняти їх з раніше отриманими оцінками [41].

Оригінальним внеском дослідження є можливість вивчати синтез складених ядер у пікноядерних реакціях та рахувати ймовірності їх утворення. Раніше такий процес вивчався на основі енергії нульових коливань атомних ядер в кристалічних ґратках, як в роботі [42].

В розділі досліджено застосовність моделі та її порівняння з популярними квазікласичними методами, які використовуються для опису пікноядерних реакцій.

1.1. Метод багаторазових внутрішніх відбиттів в описі ядерно-ядерного розсіяння з можливістю злиття

Розглянемо розсіяння одного ядра на іншому з можливістю захоплення. Частинка, що розсіюється, налітає на потенціальний бар'єр довільної форми, який можна апроксимувати великою кількістю N прямокутних сходинок [24]

$$V(r) = \begin{cases} V_1, & \text{при } r_{\min} < r \leq r_1 \text{ (область 1),} \\ \dots & \dots \\ V_{N_{\text{cap}}}, & \text{при } r_{N_{\text{cap}}-1} \leq r \leq r_{\text{cap}} \text{ (область } N_{\text{cap}}), \\ \dots & \dots \\ V_N, & \text{при } r_{N-1} \leq r \leq r_{\max} \text{ (область } N), \end{cases} \quad (1.1)$$

де V_j — константи ($j = 1 \dots N$). Нехай перша область буде мати ліву межу в точці $r_{\min}$ (при цьому $r_{\min} \leq 0$). Припустимо, що злиття ядер відбувається з найбільшою ймовірністю коли частинка потрапляє в область N_{cap} після тунелювання через бар'єр. При цьому, завдяки неперервності потоків у квантовій механіці, існує ймовірність поширення хвиль у внутрішню область, і цей ефект потрібно враховувати. Розв'язок радіальної хвильової функції (до її нормування) для енергій, вищих за висоту бар'єра, має вигляд

$$\chi(r) = \begin{cases} \alpha_1 e^{ik_1 r} + \beta_1 e^{-ik_1 r}, & \text{при } r_{\min} < r \leq r_1 \text{ (область 1),} \\ \alpha_2 e^{ik_2 r} + \beta_2 e^{-ik_2 r}, & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2 \text{ (область 2),} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{N-1} e^{ik_{N-1} r} + \beta_{N-1} e^{-ik_{N-1} r}, & \text{при } r_{N-2} \leq r \leq r_{N-1} \text{ (область } N-1), \\ e^{-ik_N r} + A_R e^{ik_N r}, & \text{при } r_{N-1} \leq r \leq r_{\max} \text{ (область } N), \end{cases} \quad (1.2)$$

де α_j та β_j — невідомі амплітуди, A_R — невідома амплітуда повного відбиття, $k_j = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\tilde{E} - V_j)}$ — комплексні хвильові числа. Умова нормування полягає в тому, щоб модуль амплітуди падаючої хвилі $e^{-ik_N r}$ дорівнював оди-

ниці. Можна знайти розв'язок цієї задачі за допомогою методу багаторазових внутрішніх відбиттів.

Кожну хвилю на довільному етапі можна представити як добуток $e^{\pm ik_j r}$ та невідомої амплітуди. Амплітуда хвилі, що пройшла межу з номером j , записується як добуток амплітуди падаючої хвилі та нового фактора $T_j^{\pm}$ — амплітуди переходу через межу з номером j . Нижній індекс вказує номер межі, верхній індекс $+$ або $-$ вказує напрямок падаючої хвилі: вправо або вліво відповідно. Амплітуда відбитої від межі хвилі з номером j зв'язана з амплітудою падаючої на цю межу хвилі через нові множники $R_j^{\pm}$. Коефіцієнти $T_1^{\pm} \dots T_{N-1}^{\pm}$ та $R_1^{\pm} \dots R_{N-1}^{\pm}$ можна знайти з наступних рекурентних співвідношень, отриманих раніше у [30]

$$\begin{aligned} T_j^+ &= \frac{2k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})r_j}, & T_j^- &= \frac{2k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})r_j}, \\ R_j^+ &= \frac{k_j - k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{2ik_j r_j}, & R_j^- &= \frac{k_{j+1} - k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{-2ik_{j+1} r_j}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ключовим аспектом у формалізмі БВВ для бар'єра з дійсно великою кількістю сходинок (від 1000 до 1000000 таких сходинок для апроксимації потенціалу) є розрахунок сумарних хвиль для довільної області. Хвиля, що приходить в область з номером $j - 1$, сформована всіма можливими падаючими хвилями на бар'єр в координаті r_{j-1} , що утворені після всіх відбиттів та проходжень хвиль у праву область від цього бар'єра. Амплітуда такої сумарної хвилі визначена сумою амплітуд усіх падаючих хвиль на бар'єр у точці r_{j-1} , помножених на T_{j-1}^- , як

$$\tilde{T}_{j-1}^- = \tilde{T}_j^- T_{j-1}^- \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+)^m \right) = \frac{\tilde{T}_j^- T_{j-1}^-}{1 - R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+}. \quad (1.4)$$

Повна амплітуда відбиття $\tilde{R}_j^+$ містить в собі всі хвилі, що проходять через межу в координаті r_j , які поширюються вправо і потім після відбиття та проходження повертаються в область з номером j

$$\tilde{R}_{j-1}^+ = R_{j-1}^+ + \frac{T_{j-1}^+ \tilde{R}_j^+ T_{j-1}^-}{1 - \tilde{R}_j^+ R_{j-1}^-}. \quad (1.5)$$

Амплітуди $\tilde{R}_{N-1}^+ \dots \tilde{R}_{N_{\text{cap}}}^+$ та $\tilde{T}_{N-1}^+ \dots \tilde{T}_{N_{\text{cap}}}^+$ визначаються за допомогою рекурентних співвідношень (1.4) та (1.5), з початковою умовою

$$\tilde{R}_{N-1}^+ = R_{N-1}^+, \quad \tilde{T}_{N-1}^- = T_{N-1}^-. \quad (1.6)$$

Амплітуда сумарної відбитої хвилі в точці r_{j+1} , яка поширюється вліво

$$\tilde{R}_{j+1}^- = R_{j+1}^- + \frac{T_{j+1}^- \tilde{R}_j^- T_{j+1}^+}{1 - R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-}. \quad (1.7)$$

Сумарна амплітуда $A_{T,\text{bar}}$ проходження через бар'єр та сумарна амплітуда $A_{R,\text{bar}}$ відбиття від бар'єра визначається за допомогою всіх хвиль, що пройшли область бар'єру від r_{cap} до r_{N-1} , таким чином:

$$A_{T,\text{bar}} = \tilde{T}_{N_{\text{cap}}}^-, \quad A_{R,\text{bar}} = \tilde{R}_{N-1}^-, \quad \text{де } \tilde{R}_{N_{\text{cap}}}^- = R_{N_{\text{cap}}}^-. \quad (1.8)$$

1.1.1. Амплітуди, коефіцієнти проходження та відбиття відносно бар'єру, перевірка

Можна знайти суму всіх амплітуд $A_{R,\text{ext}}$ хвиль, що відбилися від потенціального бар'єра ззовні (від зовнішньої точки повороту $r_{\text{tp,ext}}$ до r_{N-1}) та поширювалися назовні (що можна схарактеризувати як розсіювання на потенціалі) таким чином

$$A_{R,\text{ext}} = \tilde{R}_{N-1}^-, \quad \text{де } \tilde{R}_{N_{\text{tp,ext}}}^- = R_{N_{\text{tp,ext}}}^-, \quad (1.9)$$

та сумарну амплітуду $A_{R,\text{tun}}$ всіх хвиль, що відбилися відносно області потенціалу від r_{cap} до зовнішньої точки повороту $r_{\text{tp,ext}}$ (іншими словами, вони пройшли через область зовнішнього потенціалу (без відбиттів), протунелювали під бар'єром, з можливим проходженням до межі в точці r_{cap} та потім відбилися назад)

$$A_{R,\text{tun}} = A_{R,\text{bar}} - A_{R,\text{ps}}. \quad (1.10)$$

Оцінимо амплітуду осциляцій A_{osc} в області з номером N_{cap} , де відбувається злиття, як

$$A_{\text{osc}}(N_{\text{cap}}) = \frac{1}{1 - \tilde{R}_{N_{\text{cap}}-1}^- \tilde{R}_{N_{\text{cap}}}^+}. \quad (1.11)$$

Тепер визначимо коефіцієнти проникності T_{bar} та відбиття R_{bar} відносно всього бар'єра (тобто області потенціалу від r_{cap} до r_{N-1}) та додамо також визначення для коефіцієнтів R_{ext} відбиття від зовнішньої частини бар'єра (тобто області від $r_{\text{tp,ext}}$ до r_{N-1}), коефіцієнт R_{tun} відбиття від області бар'єра (тобто області від r_{cap} до $r_{\text{tp,ext}}$) як

$$\begin{aligned} T_{\text{bar}} &= \frac{k_{\text{cap}}}{k_N} |A_{T,\text{bar}}|^2, & R_{\text{bar}} &= |A_{R,\text{bar}}|^2, \\ R_{\text{ext}} &= |A_{R,\text{ext}}|^2, & R_{\text{tun}} &= |A_{R,\text{tun}}|^2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Умова, що перевіряє правильність результатів порахованих методом БВВ

$$T_{\text{bar}} + R_{\text{bar}} = 1. \quad (1.13)$$

Для сум амплітуд в області з номером j маємо

$$\begin{aligned} \beta_j &\equiv \sum_{i=1} \beta_j^{(i)} = \tilde{T}_j^- \left(1 + \sum_{i=1} (\tilde{R}_{j-1} \tilde{R}_j^+)^i \right) = \frac{\tilde{T}_j^-}{1 - \tilde{R}_{j-1} \tilde{R}_j^+}, \\ \alpha_j &\equiv \sum_{i=1} \alpha_j^{(i)} = \tilde{R}_{j-1} \sum_{i=1} \beta_j^{(i)} = \frac{\tilde{R}_{j-1} \tilde{T}_j^-}{1 - \tilde{R}_{j-1} \tilde{R}_1^+}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.1.2. Ймовірність існування складеного ядра

Для розрахунку ймовірності існування складеного ядра, визначаємо інтеграл від квадрата хвильової функції у внутрішній області бар'єра. Ця область знаходиться між двома внутрішніми точками повороту $r_{\text{int},1}$ та $r_{\text{int},2}$. В області надбар'єрних енергій маємо

$$\begin{aligned} \int_{r_{\text{int},1}}^{r_{\text{int},2}} |\chi(r)|^2 dr &= \sum_{j=1}^{n_{\text{int}}} \int_{r_{j-1}}^{r_j} \left| \sum_{i=1} \alpha_j^{(i)} e^{ik_j r} + \sum_{i=1} \beta_j^{(i)} e^{-ik_j r} \right|^2 dr = \\ &= \sum_{j=1}^{n_{\text{int}}} \left\{ (|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2) \Delta r + \frac{|\alpha_j \beta_j|}{k_j} \sin(\theta_{\alpha_j} - \theta_{\beta_j} + 2k_j r) \Big|_{r_{j-1}}^{r_j} \right\}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

де θ_{α_j} та θ_{β_j} — це фази амплітуд α_j та β_j відповідно. Якщо просторова область включає тунелювання, то вищенаведені формули повинні бути переписані в

комплексній формі (тут k_j — комплексні числа)

$$\begin{aligned} \int_0^{r_{\text{int,max}}} |\chi(r)|^2 dr &= \sum_{j=1}^{n_{\text{int,max}}} \int_{r_{j-1}}^{r_j} |\alpha_j e^{ik_j r} + \beta_j e^{-ik_j r}|^2 dr = \\ &= \sum_{j=1}^{n_{\text{int,max}}} \left\{ (|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2) \Delta r + \frac{\alpha_j \beta_j^*}{2ik_j} e^{2ik_j r} \Big|_{r_{j-1}}^{r_j} - \frac{\alpha_j^* \beta_j}{2ik_j} e^{-2ik_j r} \Big|_{r_{j-1}}^{r_j} \right\}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Визначимо ймовірність існування складеного ядра через інтеграл (1.16), порахований у просторовій області між двома точками повороту (де внутрішня точка повороту визначається як точка повороту для підбар'єрних енергій, або як координата максимуму бар'єра для надбар'єрних енергій)

$$\begin{aligned} P_{\text{cn}} \equiv \int_{r_{\text{int},1}}^{r_{\text{int},2}} |\chi(r)|^2 dr &= \sum_{j=1}^{n_{\text{int}}} \left\{ (|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2) \Delta r + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_j \beta_j^*}{2ik_j} e^{2ik_j r} \Big|_{r_{j-1}}^{r_j} - \frac{\alpha_j^* \beta_j}{2ik_j} e^{-2ik_j r} \Big|_{r_{j-1}}^{r_j} \right\}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

У випадку найпростішого бар'єра, як у [43], можна записати $P_{\text{cn}}(E)$ так

$$\begin{aligned} P_{\text{cn}}^{(\text{без злиття})} &= P_{\text{osc}} T_{\text{bar}} P_{\text{loc}}, \\ P_{\text{osc}} &= |A_{\text{osc}}|^2 = \frac{(k + k_1)^2}{2k^2(1 - \cos(2k_1 r_1)) + 2k_1^2(1 + \cos(2k_1 r_1))}, \\ T_{\text{bar}} &\equiv \frac{k_1}{k_2} |T_1^-|^2, \\ P_{\text{loc}} &= 2 \frac{k_2}{k_1} \left(r_1 - \frac{\sin(2k_1 r_1)}{2k_1} \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Порівнюючи формулу (1.17) з рівнянням (1.18), бачимо, що рівняння (1.17) складніше. Неможливо представити це рівняння як добуток від трьох коефіцієнтів проникності, осциляцій та локалізації, як показано в рівняння (1.18) (що відповідає ідеї Гамова, застосованої до зворотного процесу, тобто, α -розпаду ядра, як просто множення двох факторів осциляції та проникності). Формула

для швидкого злиття у випадку найпростішого бар'єра

$$P_{\text{сн}}^{(\text{швидке злиття})} = \left| \sum_{i=1} \beta_1^{(i)} \right|^2 \int_0^{r_1} \left| R_0 e^{ik_1 r} + e^{-ik_1 r} \right|^2 dr = |T_1^-|^2 r_1 = \frac{k_2 r_1}{k_1} T_{\text{бар}}. \quad (1.19)$$

1.1.3. Переріз та коефіцієнти злиття

Стандартне визначення перерізу злиття σ_{fus} , визначене на основі проникності бар'єра $T_{\text{бар},1}$ та ймовірності злиття P_l (яке відбувається, як тільки ядро протунелювало через бар'єр), має наступний вигляд

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sigma_l(E), \quad \sigma_l(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2mE} (2l+1) T_{\text{бар},1}(E) P_l, \quad (1.20)$$

де σ_l — парціальні перерізи злиття при l , E — енергія відносного руху між ядрами. Для вивчення складеного ядра введемо нове визначення перерізу злиття в термінах імовірності існування складеного ядра (1.17)

$$\sigma_l = \frac{\pi \hbar^2}{2mE} (2l+1) f_l(E) P_{\text{сн}}(E), \quad (1.21)$$

де $f_l(E)$ — новий фактор, який необхідний для поєднання ймовірності $P_{\text{сн}}(E)$, проникності $T_{\text{бар},l}(E)$ та старого фактора злиття P_l . Для знаходження точного виразу цього коефіцієнту, розглянемо випадок повного злиття описаного старою формулою. Подібний результат повинен дати коефіцієнт при коефіцієнтах злиття, що дорівнюють одиниці. Отримаємо

$$f(E) = \frac{k_{\text{сеп}}}{k_N |r_{\text{сеп}} - r_{\text{tp,in},1}|}. \quad (1.22)$$

Тепер, щоб вивчити формування складеного ядра з повільним злиттям, варіюємо ці коефіцієнти злиття у просторовій області між точкою захоплення $r_{\text{сеп}}$ та другою внутрішньою точкою повороту $r_{\text{int},2}$.

1.2. Застосування формалізму БВВ для пікноядерних реакцій в компактних зорях

Головною задачею цього розділу стоїть дослідження швидкостей пікноядерних реакцій в середовищах компактних зір. На відміну від термоядерних реакцій, в яких злиття легких атомних ядер відбувається при досягненні температури плазми десятків та сотень трильйонів градусів кельвіна, пікноядерне горіння відбувається в щільних ядрах білих карликів [26] та корі нейтронних зір [41, 44] при невеликих температурах. У [45] досліджені швидкості пікноядерних реакцій, які відбуваються при енергії нульових коливань атомних ядер в ґратці.

Раніше [46] були досліджені такі реакції для злиття карбону та кисню на основі мікроскопічного формалізму за допомогою астрофізичних S -факторів. В роботі [47] були оцінені S -фактори для 946 реакцій злиття для багатих нейтронами ізотопів C, O та Mg при енергії в системі центра-мас від 2 до 30 MeV.

У цьому підрозділі буде досліджена можливість застосування методу БВВ для пікноядерних реакцій, адже цей метод дозволяє врахувати квантові потоки у внутрішній області потенціалу, що неможливо, наприклад, для методів на основі ВКБ-наближення.

1.2.1. Потенціал взаємодії між ядрами

Визначимо потенціал взаємодії між нуклонами як

$$V(r) = v_c(r) + v_N(r) + v_{l=0}(r), \quad (1.23)$$

де $v_c(r)$, $v_N(r)$ та $v_l(r)$ — кулонівська, ядерна та відцентрова компоненти мають вигляд:

$$v_N(r) = -\frac{V_R}{1 + \exp\left\{\frac{r - R_R}{a_R}\right\}}, \quad v_l(r) = \frac{l(l+1)}{2mr^2},$$

$$v_c(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{r}, & \text{при } r \geq R_c, \\ \frac{Ze^2}{2R_c} \left\{3 - \frac{r^2}{R_c^2}\right\}, & \text{при } r < R_c, \end{cases} \quad (1.24)$$

тут $V_R = -75$ МеВ — сила ядерної компоненти, R_c та R_R — кулонівський та ядерний радіус двоядерної системи, a_R — дифузний параметр. При розрахунках буде використовуватися

$$R_R = r_R (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}), \quad R_c = r_c (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}), \quad a_R = 0.44 \text{ фм},$$

$$r_R = 1.30 \text{ фм}, \quad r_c = 1.30 \text{ фм}. \quad (1.25)$$

1.2.2. Відстань між ядрами в зоряній матерії

В компактних зорях — білих карликах та нейтронних зорях — присутні кристалічні структури згідно з дослідженнями [1, 48]. Для застосування методу БВВ до пікноядерних реакцій необхідно оцінити відстань між атомними ядрами в подібних решітках.

Позначимо відстань між двома близькими ядрами, зафіксованими в ґратці, як $2R_0$, і помістимо між цими ядрами «розсіяне» ядро (аналогічно до [45]). Густина ρ_0 у сфері, що оточує одне ядро решітки, можна знайти як співвідношення маси m_A ядра до об'єму V_A всередині цієї сфери, що можна записати як

$$\rho_0 = \frac{M}{V} = \frac{m_A}{V_A} = \frac{A m_u}{4/3 \pi R_0^3}, \quad (1.26)$$

де

$$R_0 = \left(\frac{A m_u}{4/3 \pi \rho_0} \right)^{1/3}, \quad (1.27)$$

тут m_u — маса нуклона, а A — масове число ядра.

Елементарно розраховується і концентрація нуклонів n_A :

$$\left(\rho_0 = A m_u \cdot n_A\right) \rightarrow \left(n_A = \frac{\rho_0}{A m_u}\right). \quad (1.28)$$

1.3. Синтез елементів з ізотопів карбону в пікноядерних реакціях

1.3.1. Потенціал взаємодії між нуклонами у вузлах ґратки

Використовуючи рівняння (1.23) та (1.24) пораховані потенціали взаємодії двох ізотопів ^XC у вузлах ґратки. Вони представлені на рисунку 1.1 та в таблиці 1.1.

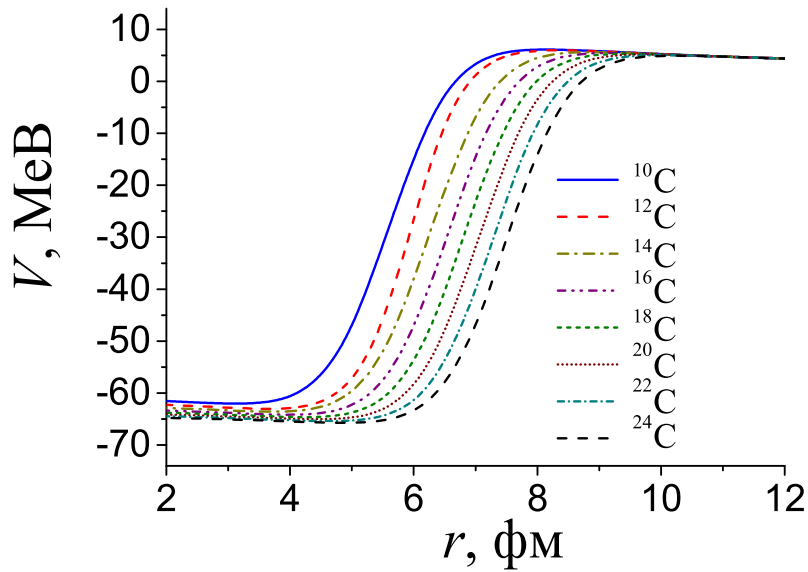


Рис. 1.1.: Потенціал взаємодії $V(r)$ двох сусідніх ізотопів ^XC в кристалічній ґратці компактної зорі. Потенціали побудовані на основі рівнянь (1.23) та (1.24).

${}^X\text{C} + {}^X\text{C}$	$r_{\min}, \text{фМ}$	$V_{\min}, \text{В}$	$r_{\max}, \text{фМ}$	$V_{\max}, \text{МеВ}$	$R_0, \text{фМ}$	$n_A, 10^{-7} \text{фМ}^{-3}$
${}^{10}\text{C} + {}^{10}\text{C}$	3,36	-62,157	7,98	+6,249	87,06	3,617 027 31
${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$	3,64	-63,018	8,33	+5,972	92,52	3,014 189 41
${}^{14}\text{C} + {}^{14}\text{C}$	3,92	-63,702	8,68	+5,743	97,40	2,583 590 92
${}^{16}\text{C} + {}^{16}\text{C}$	4,20	-64,258	8,96	+5,552	101,83	2,260 642 06
${}^{18}\text{C} + {}^{18}\text{C}$	4,48	-64,726	9,24	+5,386	105,91	2,009 459 61
${}^{20}\text{C} + {}^{20}\text{C}$	4,62	-65,133	9,52	+5,242	109,69	1,808 513 65
${}^{22}\text{C} + {}^{22}\text{C}$	4,90	-65,483	9,80	+5,115	113,23	1,644 103 31
${}^{24}\text{C} + {}^{24}\text{C}$	5,04	-65,792	10,08	+5,001	116,57	1,507 094 70

Табл. 1.1.: Параметри потенціалів взаємодії ізотопів карбону $X[\text{C}]$ при взаємодії у вузлах кристалічної ґратки. Також наведена відстань R_0 між атомами та концентрація ізотопів в ґратці. Розрахунки проведені для потенціалу на основі рівнянь (1.23) та (1.24). Ізотопи вибрані для порівняння з роботою [47], де наведені швидкості реакцій на основі астрофізичних S -факторів для різних ізотопів. Густина в центрі зорі $\rho_{\text{cr}} = 6 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$.

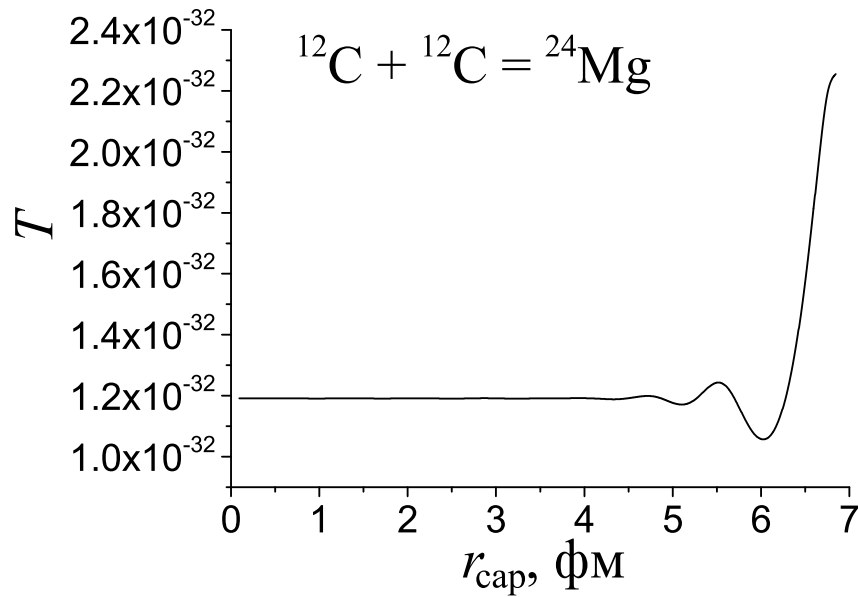


Рис. 1.2.: Коефіцієнт проникності T бар'єру в залежності від розташування точки злиття ядер r_{cap} у внутрішній області потенціалу для реакції ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$. Потенціал та параметри визначені рівняннями (1.23) та (1.24). Розрахунки проведені за енергії $E = 0,58 \text{ МеВ}$, що перевищує висоту бар'єра на $\Delta E = 0,02 \text{ МеВ}$.

1.3.2. Проникність бар'єра

На прикладі реакції $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ порахований коефіцієнт проникності потенціального бар'єра. На рисунку 1.2 розрахунки проведено за енергії $E = 0,58 \text{ MeV}$ (надлишок цієї енергії над потенціалом $E_0 = 0,021 \text{ MeV}$ при $r = R_0$). Права частина лінії на рисунку відповідає внутрішній точці повороту, тобто випадку, коли ліва частина області потенціалу заборонена лівою границею області тунелювання. Отримані результати збігаються з обчисленнями за допомогою ВКБ-наближення. Проте детальний аналіз експериментальних даних [40, 43] показує, що процес злиття найбільш ймовірно відбувається у внутрішній області на певній відстані від точки повороту. Такий підхід дає точніший опис квантових потоків у внутрішній області. Різниця між ВКБ-наближенням та методом БВВ:

$$\begin{aligned} \text{ВКБ-наближення:} \quad r_{\text{cap}} = r_{\text{tp},2} = 6,845 \text{ фм}, \quad T_{\text{bar}}^{(\text{ВКБ})} &= 2,255 \cdot 10^{-32}, \\ \text{метод БВВ:} \quad r_{\text{cap}} = r_{\text{min}} = 3,643 \text{ фм}, \quad T_{\text{bar}}^{(\text{БВВ})} &= 1,191 \cdot 10^{-32}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Порівнюючи коефіцієнт проникності бар'єра отриманого за допомогою методу БВВ та ВКБ-наближення маємо зміну у $T_{\text{bar}}^{(\text{ВКБ})}/T_{\text{bar}}^{(\text{БВВ})} = 2.255 \cdot 10^{-32}/1.191 \cdot 10^{-32} = 1.893$ рази.

1.3.3. Ймовірності утворення складених ядер у пікноядерних реакціях

Аналіз раніше [35] показав, що коефіцієнти проникності та відбиття збільшуються монотонно з енергією налітаючого ядра.

Це означає, що коефіцієнти проникності та відбиття самі по собі не можуть вказувати на можливе існування важких ядер, що можуть синтезуватися у пікноядерних реакціях у зорях. Така поведінка цих характеристик узгоджується з аналізом захоплення α -часток ядрами [40, 43].

Також існує можливість утворення складеного ядра. На рисунку 1.3 показані такі ймовірності утворення складеного ядра в реакціях ізотопів карбону $^X\text{C} + ^X\text{C}$. На рисунку 1.3 чітко видно наявність максимумів. Можна зробити висновок, що утворення складеного ядра при цих енергіях більш ймовірно,

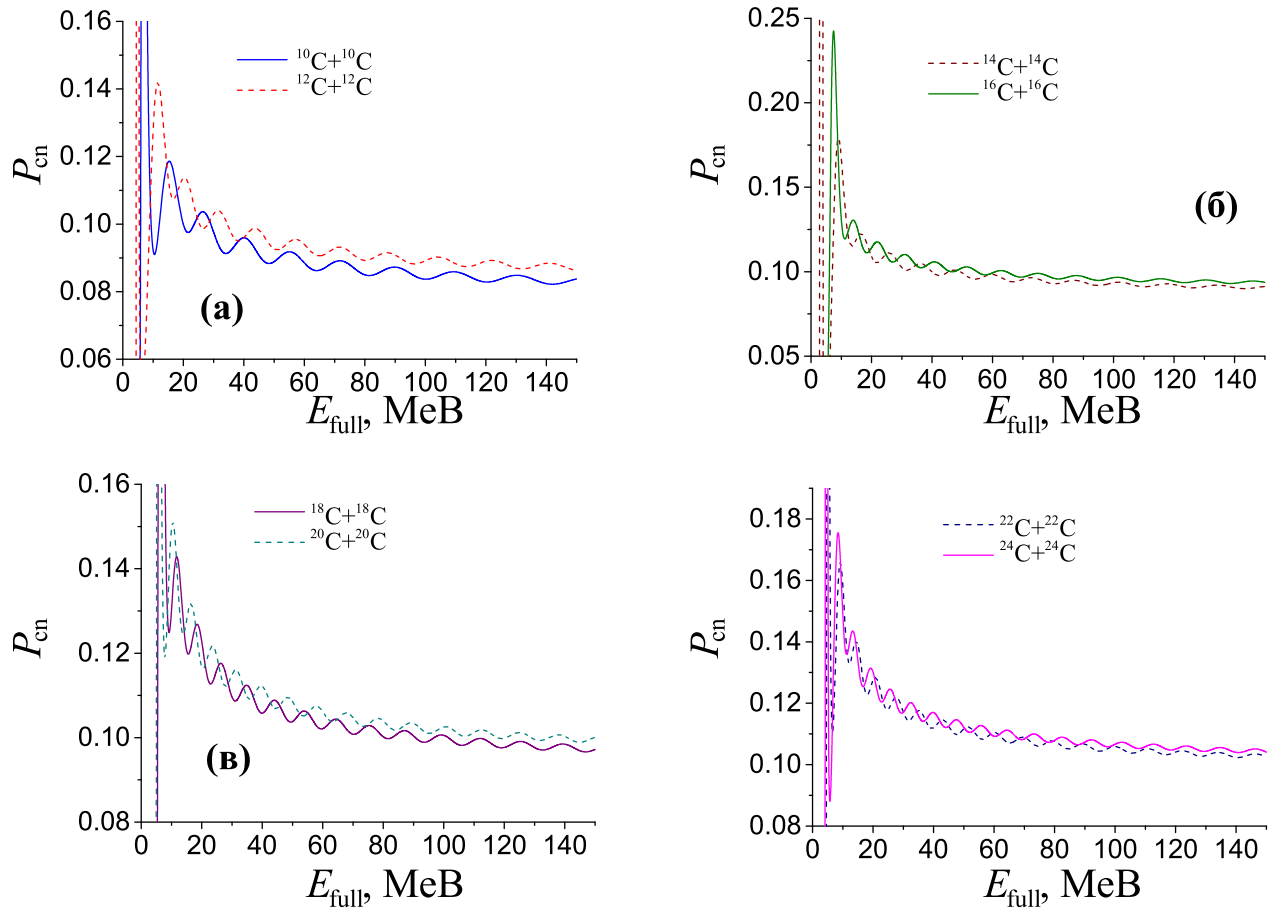


Рис. 1.3.: Ймовірності P_{cn} утворення складеного ядра в залежності від енергії E_{full} налітаючого ізотопу карбону в реакціях $^{10}\text{C} + ^{12}\text{C}$, $^{12}\text{C} + ^{10}\text{C}$ (а), $^{14}\text{C} + ^{14}\text{C}$, $^{16}\text{C} + ^{16}\text{C}$ (б), $^{18}\text{C} + ^{18}\text{C}$, $^{20}\text{C} + ^{20}\text{C}$ (в) та $^{22}\text{C} + ^{22}\text{C}$, $^{24}\text{C} + ^{24}\text{C}$ (г). Параметри потенціалу визначені в рівняннях (1.23) та (1.24).

№	$^{10}\text{C} + ^{10}\text{C}$	$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	$^{14}\text{C} + ^{14}\text{C}$	$^{16}\text{C} + ^{16}\text{C}$	$^{18}\text{C} + ^{18}\text{C}$	$^{20}\text{C} + ^{20}\text{C}$	$^{22}\text{C} + ^{22}\text{C}$	$^{24}\text{C} + ^{24}\text{C}$
1	0,63471	4,88176	9,06212	7,27054	6,37475	5,47896	5,18036	4,58317
2	15,33267	11,45090	16,52705	13,83968	11,74950	10,55511	9,06212	8,46493
3	26,38076	20,40882	25,78357	21,90180	18,31864	16,52705	14,43687	13,24248
4	40,11623	31,45691	36,23447	30,85972	26,38076	23,69339	20,70741	19,21443
5	55,04609	43,69940	47,58116	40,71343	34,74148	31,15832	27,57515	25,48497
6	71,76754	57,13627	59,82365	51,46293	43,99800	39,51904	35,04008	32,35271
7	89,68337	71,76754	72,96192	62,80962	53,85170	48,47695	42,80361	39,81764
8	109,39078	87,29459	86,99599	74,75351	64,30261	57,73347	51,16433	47,58116
9	130,29259	104,01603	101,62725	87,59319	75,35070	67,88577	60,12224	55,64329
10	–	121,93186	117,45291	101,03006	86,99599	78,03808	69,37000	64,30261
11	–	–	134,17435	115,36273	98,93988	89,08617	79,23246	72,96192
12	–	–	–	130,29259	112,07816	100,43287	89,08617	82,51703
13	–	–	–	146,11824	125,21643	112,37675	99,83567	92,07214
14	–	–	–	–	139,25050	124,91784	110,88377	102,22445
15	–	–	–	–	–	137,75752	122,23046	112,67535
16	–	–	–	–	–	–	134,17435	123,42485
17	–	–	–	–	–	–	146,11824	134,77154
18	–	–	–	–	–	–	–	146,11824

Табл. 1.2.: Перші квазізв’язані стани для реакцій ізотопів карбону ^{10}C , ^{12}C , ^{14}C , ^{16}C , ^{18}C , ^{20}C , ^{22}C та ^{24}C , розраховані за допомогою методу багаторазових внутрішніх відбиттів для енергії падаючого ядра до 150 MeV.

ніж при енергіях нульових коливань. Ці максимуми можна пояснити врахуванням квантових потоків у внутрішній області потенціалу.

В таблиці 1.2 наведені енергії квазізв’язних станів для реакцій з ізотопами карбону до 150 MeV. Порівнюючи отримані результати з висотами бар’єрів в таблиці 1.1 видно, що тільки обмежена кількість таких станів нижча за висоту бар’єра. Тобто, згідно з розрахунками, можна очікувати синтез ізотопів магнію в реакціях $^{10}\text{C} + ^{10}\text{C}$, $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$, $^{24}\text{C} + ^{24}\text{C}$.

1.3.4. Швидкості реакцій в середовищі компактних зір

Згідно з [45] швидкість пікноядерних реакцій (ймовірність в секунду) при розсіянні одного ядра з на іншому розраховується за формулою:

$$\begin{aligned}
 W &= (\text{пройдений потік при } R_n) \times 4\pi R_n^2 \times P_n, \\
 &= (\text{падаючий потік}) \times T_{\text{full}} \times 4\pi R_n^2 \times P_n,
 \end{aligned}
 \tag{1.30}$$

де P_n — ймовірність проходження ядерної реакції коли ядро вже тунелювало через бар’єр, T_{full} — коефіцієнт проникності бар’єра. Тобто, швидкість реакцій

визначається перерізом розсіяння реакції σ як

$$W = \sigma(E) \times (\text{падаючий потік}). \quad (1.31)$$

Для методу БВВ переріз утворення складеного ядра визначається коефіцієнтом проникності бар'єра $T_{\text{bar},l}$ та ймовірністю злиття P_l , яке відбувається одразу після тунелювання ядра через бар'єр. Тобто, для перерізу візьмемо $\sigma_l(E)$ з рівнянь (1.20) та (1.21).

Слідуючи логікою [45] для швидкостей реакцій маємо

$$\begin{aligned} W &= \frac{S(E)}{E} \times f_l(E) P_{\text{cn}} \times (\text{падаючий потік}), \\ S(E) &= \frac{\pi \hbar}{2m} (2l + 1), \end{aligned} \quad (1.32)$$

де величина $S(E)$ описує швидкість ядерних реакцій і її можна взяти з експериментальних даних як представлено в роботі [41].

Використовуючи $f(E)$ з рівняння (1.22) в простій формі

$$f^{(\text{simple})}(E) = \frac{k_1}{k_2 r_1}, \quad (1.33)$$

де $k_1 = k_{\text{cap}}$, $k_2 = k_N$, $r_{\text{cap}} = r_1$, $r_{\text{tp},\text{in},1} = 0$.

Для знаходження потоку використаємо означення потоку у квантовій механіці й отримаємо

$$j_{\text{inc}}(r) = -\frac{k_1 \hbar}{m}. \quad (1.34)$$

Маємо вираз для швидкості ядерних реакцій

$$\begin{aligned} W &= \frac{k_1 \hbar}{m} \frac{\pi \hbar^2}{2mE} (2l + 1) f_l(E) P_{\text{cn}}(E) \Big|_{l=0}, \\ &= \frac{k_1 \hbar}{m} \frac{S(E)}{E} f_l(E) P_{\text{cn}}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Отже, користуючись формалізмом з [45] маємо формулу для швидкості пі-кноядерних реакцій на основі ВКБ-наближення (позначену W_{old}) та методу

БВВ (позначену W_{new}):

$$\begin{aligned} W_{\text{old}} &= \frac{k_1 \hbar S(E)}{m E} T_{\text{bar}}, \\ W_{\text{new}} &= \frac{k_1 \hbar S(E)}{m E} f_l(E) P_{\text{cn}}, \\ P_{\text{cn}}^{(\text{без злиття})} &= T_{\text{bar}} P_{\text{osc}} P_{\text{loc}}, \quad P_{\text{cn}}^{(\text{швидке злиття})} = \frac{k_2 r_1}{k_1} T_{\text{bar}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Маємо співвідношення між оцінками швидкостей реакцій за ВКБ-наближенням та методом БВВ

$$W_{\text{new}} = \frac{k_1 \hbar}{m} \times \frac{S(E)}{E} \times T_{\text{bar}}^{(\text{БВВ})}(r_{\text{cap}}) = \frac{W_{\text{old}}}{1,893}. \quad (1.37)$$

Для розрахунків візьмемо фактор S_{CC} з [45]:

$$S_{\text{CC}} = 8,83 \cdot 10^{16} \text{ MeV} \cdot \text{бн}. \quad (1.38)$$

Тоді

$$W_{\text{old}} = 1,943542 \cdot 10^3 \frac{\text{MeV}^{-3}}{\text{с}}, \quad W_{\text{new}} = 1,026506 \cdot 10^3 \frac{\text{MeV}^{-3}}{\text{с}}, \quad (1.39)$$

що при перерахунку в кількість реакцій в секунду дасть

$$P_{\text{old}} = 4,686562 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{с}}, \quad P_{\text{new}} = 2,475266 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{с}}. \quad (1.40)$$

Розрахуємо швидкості ядерних реакцій в об'ємі середовища компактних зір. З [45] маємо для квадрата хвильової функції

$$|\chi_{\text{inc}}|^2 = \frac{1}{r_0^3 \pi^{3/2}}, \quad r_0 = \left(\frac{\hbar}{2Ze} \right)^{1/2} \left(\frac{R_0^3}{m} \right)^{1/4}, \quad (1.41)$$

Де коефіцієнти

$$\frac{r_0}{R_0} = 0,13856966, \quad c_0 = \left(\frac{R_0}{r_0} \right)^3 \cdot \frac{1}{R_0^3 \pi^{3/2}} = 681,741\,719 \text{ MeV}^3, \quad (1.42)$$

та нові швидкості реакцій:

$$\bar{W} = W \cdot c_0, \quad \bar{P} = P \cdot c_0. \quad (1.43)$$

Маємо швидкість та кількість реакцій

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\text{old}} &= 1324993,664 \frac{1}{\text{с}}, & \bar{W}_{\text{new}} &= 699811,965 \frac{1}{\text{с}}, \\ \bar{P}_{\text{old}} &= 2,556019867 \frac{10^{52}}{\text{с} \cdot \text{см}^3}, & \bar{P}_{\text{new}} &= 1,349993677 \frac{10^{52}}{\text{с} \cdot \text{см}^3}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

1.4. Енергетичні спектри нульових коливань ядер у ґратках

1.4.1. Спектр нульових коливань в потенціалі квантового осцилятора

Задача пікноядерних реакцій еквівалентна до задачі квантового осцилятора, адже ядро, що розглядається як «налітаюче», знаходиться в полі двох сусідніх атомних ядер — в потенціальній ямі. Таким чином, є можливість порахувати енергетичний спектр коливань такого ядра. Згідно з [45], енергетичний спектр

$$E_0^{(\text{zero})} = \frac{\hbar w}{2} = \frac{\hbar Z e}{\sqrt{m R_0^3}}, \quad \Delta E = \frac{2 Z^2 e^2}{R_0}, \quad E_{\text{full}} = E_0^{(\text{zero})} + \Delta E. \quad (1.45)$$

Тут $E_0^{(\text{zero})}$ — це енергія основного стану гармонічного осцилятора, ΔE — зміщення нульового рівня через взаємодію з іншими ядрами в ґратці, E_{full} — повна енергія в основному стані. Наприклад, для реакції $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} = ^{24}\text{Mg}$ отримаємо

$$\begin{aligned} E_0^{(\text{zero})} &= 0,02180806 \text{ MeV}, \quad \Delta E = 0,56787237 \text{ MeV}, \\ E_{\text{full}}^{(\text{zero mode})} &= 0,58968043 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Енергетичний спектр обчислимо за формулою для енергетичних рівнів гармонічного осцилятора

$$E_n^{(\text{zero})} = (2n + 1) \cdot \frac{\hbar \omega}{2} = (2n + 1) \cdot E_{n=0}^{(\text{zero})} = (2n + 1) \frac{\hbar Z e}{\sqrt{m} R_0^3}. \quad (1.47)$$

Досліджуючи властивості пікноядерних реакцій в кристалічних ґратках компактних зір є можливість оцінити відстань між сусідніми атомними ядрами. Використовуючи рівняння (1.27) і доповнюючи його рівнянням (1.46) отримаємо вирази для енергій

$$E_0^{(\text{zero})} = c_1 \cdot \frac{Z}{A} \sqrt{\rho_0}, \quad c_1 = \hbar e \sqrt{\frac{8\pi}{3 m_u m_p}},$$

$$\Delta E = c_2 \cdot Z^2 \left(\frac{\rho_0}{A} \right)^{1/3}, \quad c_2 = 2e^2 \left(\frac{4\pi}{3 m_u} \right)^{1/3}. \quad (1.48)$$

Для ядер з $A = 2Z$ отримали маємо наступне співвідношення

$$E_0^{(\text{zero})} = \frac{c_1}{2} \sqrt{\rho_0}, \quad \Delta E = c_2 \cdot Z^2 \left(\frac{\rho_0}{2Z} \right)^{1/3}. \quad (1.49)$$

Згідно з рівнянням (1.49) енергетичний спектр нульових коливань для ядер з $A = 2Z$ залежить тільки від густини середовища, в якому вони знаходяться. Розрахований енергетичний спектр нульових коливань для ізотопів карбону ^{12}C в кристалічних ґратках представлений в таблиці 1.3.

1.4.2. Розрахунок енергетичного спектра нульових коливань за допомогою методу БВВ

Формалізм методу багаторазових внутрішніх відбиттів може бути використаний з метою обчислення енергетичного спектра при нульових коливаннях. Радіальна хвильова функція в асимптотичній області має вигляд як

$$\chi(r) = e^{-ikr} + A_R e^{+ikr}. \quad (1.50)$$

Зокрема, такий же вигляд має хвильова функція в точці R_0 , де розсіяне ядро знаходиться в мінімумі потенціалу між двома сусідніми ядрами у вузлах ґра-

№	Енергія, $E_n^{(\text{zero})}$, MeV	Енергія, $E_{\text{full}}^{(\text{zero})}$, MeV
1	0,021808061833736	0,589680437522993
2	0,065424185501208	0,633296561190465
3	0,109040309168680	0,676912684857937
4	0,152656432836153	0,720528808525410
5	0,196272556503626	0,764144932192882
6	0,239888680171098	0,807761055860354
7	0,283504803838570	0,851377179527827
8	0,327120927506043	0,894993303195299
9	0,370737051173515	0,938609426862772
10	0,414353174840987	0,982225550530244

Табл. 1.3.: Енергетичні рівні для перших 10 станів при нульових коливаннях, розрахованих за допомогою рівняння (1.45) для ізотопів ^XC .

тки. Однак дискретність спектра накладає додаткову вимогу, щоб повна хвильова функція дорівнювала нулю (для непарних станів) або приймала максимальне значення по модулю (для парних станів) у цій точці. Знаходимо

$$\begin{aligned} 1) \chi(R_0) &= e^{-ikR_0} + A_R e^{+ikR_0} = e^{-ikR_0} + e^{+ikR_0}, \quad A_R = +1, \\ 2) \chi(R_0) &= e^{-ikR_0} + A_R e^{+ikR_0} = e^{-ikR_0} - e^{+ikR_0}, \quad A_R = -1. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Розрахована амплітуда коефіцієнта відбиття у точці R_0 зображена на рисунку 1.4. Можна побачити, що кожна функція має свій власний максимум та мінімум за близьких енергій. Згідно з рівнянням (1.51), можуть бути визначені енергетичні рівні уявної частини амплітуди, що прирівняна до нуля.

$$\begin{aligned} \text{парні стани:} \quad & A_R = +1, \quad \text{Re}(A_R) = +1, \quad \text{Im}(A_R) = 0, \\ \text{непарні стани:} \quad & A_R = -1, \quad \text{Re}(A_R) = -1, \quad \text{Im}(A_R) = 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Енергії станів нульових коливань для ізотопів карбону $^X\text{C} + ^X\text{C} \rightarrow ^{2X}\text{Mg}$ наведено в таблиці 1.4. Порівнюючи спектр з таблицею 1.3 маємо, що енергетичний спектр нульових коливань розрахований на основі методу БВВ суттєво відрізняється від енергетичного спектра осцилятора.

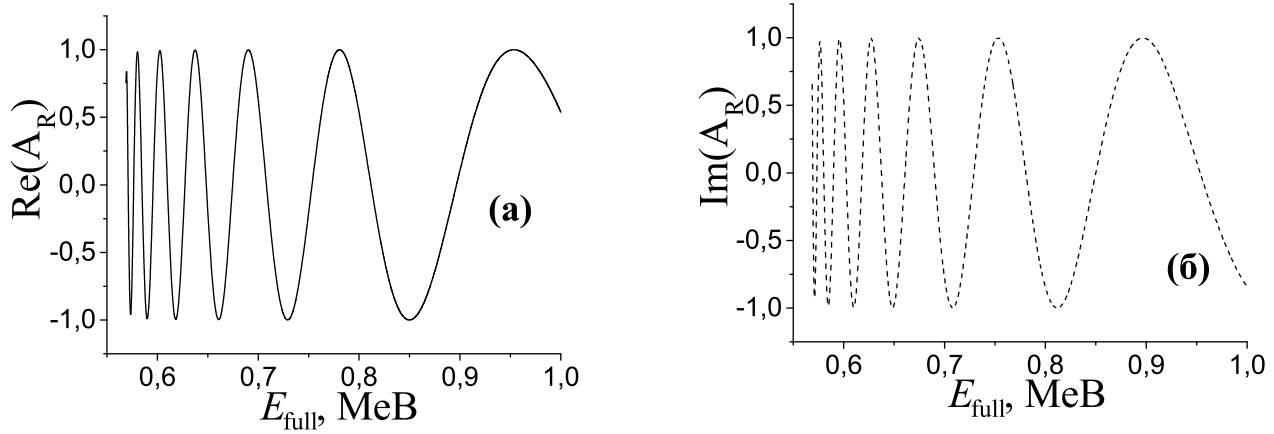


Рис. 1.4.: Дійсна та уявна частина амплітуди відбиття A_R розраховані в точці R_0 за енергій відносного руху від 0,55 до 1,0 MeV. Потенціал та параметри визначені з рівняння (1.24).

№	$^{10}\text{C} + ^{10}\text{C}$	$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	$^{14}\text{C} + ^{14}\text{C}$	$^{16}\text{C} + ^{16}\text{C}$
1	0,517434869739479	0,517434869739479	0,517434869739479	0,527054108216433
2	0,536673346693387	0,536673346693387	0,536673346693387	0,536072144288577
3	0,546292585170341	0,546292585170341	0,546292585170341	0,545090180360721
4	0,565531062124249	0,555911823647295	0,555911823647295	0,554108216432866
5	0,584769539078156	0,575150300601202	0,565531062124249	0,572144288577154
6	0,613627254509018	0,594388777555110	0,575150300601202	0,581162324649299
7	0,642484969939880	0,613627254509018	0,594388777555110	0,599198396793587
8	0,680961923847695	0,642484969939880	0,623246492985972	0,626252505010020
9	0,738677354709419	0,680961923847695	0,652104208416834	0,653306613226453
10	0,815631262525050	0,729058116232465	0,690581162324649	0,689378757515030
11	0,950300601202405	0,806012024048096	0,729058116232465	0,734468937875752
12	1,27735470941884	0,911823647294589	0,796392785571142	0,797595190380762
13	2,23927855711423	1,11382765531062	0,892585170340681	0,878757515030060
14	3,69178356713427	2,76833667334669	1,04649298597194	1,02304609218437
15	—	4,08617234468938	1,64288577154309	1,39278557114228
16	—	—	3,04729458917836	1,99699398797595
17	—	—	4,28817635270541	3,20541082164329
18	—	—	—	4,37775551102204

Табл. 1.4.: Енергії нульових коливань, розраховані за допомогою метода багаторазових внутрішніх відбиттів, для реакцій $^X\text{C} + ^X\text{C}$. Всі значення виражені в MeV. Отриманий енергетичний спектр відрізняється від спектра, розрахованого на основі квантового осцилятора 1.3. Енергії розраховані за умови $|\text{Re}(A_R)| \approx 1$.

№	$^{18}\text{C} + ^{18}\text{C}$	$^{20}\text{C} + ^{20}\text{C}$	$^{22}\text{C} + ^{22}\text{C}$	$^{24}\text{C} + ^{24}\text{C}$
1	0,517434869739479	0,527054108216433	0,536673346693387	0,517434869739479
2	0,527054108216433	0,546292585170341	0,546292585170341	0,527054108216433
3	0,536673346693387	0,555911823647295	0,555911823647295	0,536673346693387
4	0,546292585170341	0,565531062124249	0,565531062124249	0,546292585170341
5	0,555911823647295	0,584769539078156	0,575150300601202	0,594388777555110
6	0,565531062124249	0,604008016032064	0,594388777555110	0,613627254509018
7	0,575150300601202	0,623246492985972	0,604008016032064	0,632865731462926
8	0,584769539078156	0,642484969939880	0,623246492985972	0,661723446893788
9	0,594388777555110	0,671342685370741	0,652104208416834	0,690581162324649
10	0,613627254509018	0,709819639278557	0,680961923847695	0,729058116232465
11	0,632865731462926	0,748296593186373	0,719438877755511	0,767535070140281
12	0,661723446893788	0,806012024048096	0,757915831663327	0,825250501002004
13	0,738677354709419	0,882965931863727	0,815631262525050	0,911823647294589
14	0,796392785571142	1,00801603206413	0,892585170340681	1,02725450901804
15	0,882965931863727	1,27735470941884	1,01763527054108	1,29659318637275
16	1,00801603206413	2,24889779559118	1,27735470941884	2,20080160320641
17	1,30621242484970	3,26853707414830	2,24889779559118	3,14348697394790
18	2,18156312625251	4,29779559118237	3,22044088176353	4,08617234468938
19	3,26853707414830	—	4,21122244488978	—

Табл. 1.5.: (Продовження таблиці 1.4)

1.4.3. Плазмове екранування в ядерних реакціях

Плазмове екранування в термоядерних реакціях явище гарно досліджене для сучасних експериментів. Також існують роботи, які аналізують вплив такого екранування на ядерні реакції в компактних зорях [26]. Варто оцінити вплив плазмового екранування на пікноядерні реакції, описані за допомогою методу БВВ.

Для цього можна використати підхід, викладеним в роботі [49], де були досліджено плазмове екранування в термоядерних реакціях в щільній ядерній матерії. В рамках моделі необхідно ввести кулонівський потенціал взаємодії:

$$U_C(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - H(r), \quad (1.53)$$

де $H(r)$ — це потенціал середнього поля плазмового екранування, а Z_i — електричний заряд ядра з номером i (де $i = 1, 2$).

Потенціал $H(r)$ визначається за моделлю іонної сфери, запропонованою Салпетером [50]. Згідно з моделлю [49], електронна хмара розглядається як нестискувана рівномірно заряджена крапля рідини. Ця крапля має постійний

об'єм, а заряд цієї краплі повністю компенсує заряд ядер, що взаємодіють.

У цьому підході також можна розрахувати S -фактори, які необхідні для розрахунку швидкостей реакцій, (як у рівняннях (1.36)), самі швидкості реакцій, при цьому включаючи вплив екранування. Згідно з [49], визначаємо кулонівський потенціал $U_C(r)$ для взаємодіючих ядер як

$$U_{C,full}(r) = v_C(r) + H(r), \quad (1.54)$$

де $v_C(r)$ — це кулонівський потенціал без екранування, а $H(r)$ відповідає за потенціал середнього поля при екрануванні. На відміну від потенціалу в [49], кулонівський потенціал $v_C(r)$ обчислюється на основі рівнянь (1.24) та (1.25). Потенціал ядерної взаємодії $v_N(r)$ теж береться з рівняння (1.24) (при $l = 0$). Потенціал середнього поля $H(r)$ береться з [49]:

$$H(r) = E_{12} h(x), \quad x = \frac{r}{a_{12}}, \quad (1.55)$$

де

$$h(x) = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \dots \quad (1.56)$$

При однакових ядрах $Z_1 = Z_2$ значення параметрів b_0, b_2, b_4 наведені у [49]

$$b_0 = 1,0573, \quad b_2 = -0,25, \quad b_4 = 0,0394. \quad (1.57)$$

Інші параметри присутні в рівнянні (1.55) також є в [49]

$$\begin{aligned} a_e &= \left(\frac{3}{4\pi n_e} \right)^{1/3}, & a_j &= Z_j^{1/3} a_e, \\ a_{12} &= \frac{a_1 + a_2}{2}, & E_{12} &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{a_{12}}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

де n_e концентрація електронів.

1.4.4. Енергетичні спектри нульових коливань з урахуванням екранування

Як зазначено в [49], рівняння (1.56) працює при умові $x \ll 2$. Припустимо, що ця умова виконується при реакції $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$. Потенціал взаємодії двох ізотопів карбону ^{12}C при густині $\rho_0 = 6 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$ з врахуванням екранування показаний на рисунку 1.5. Як видно з рисунка, при цій густині вплив екрану-

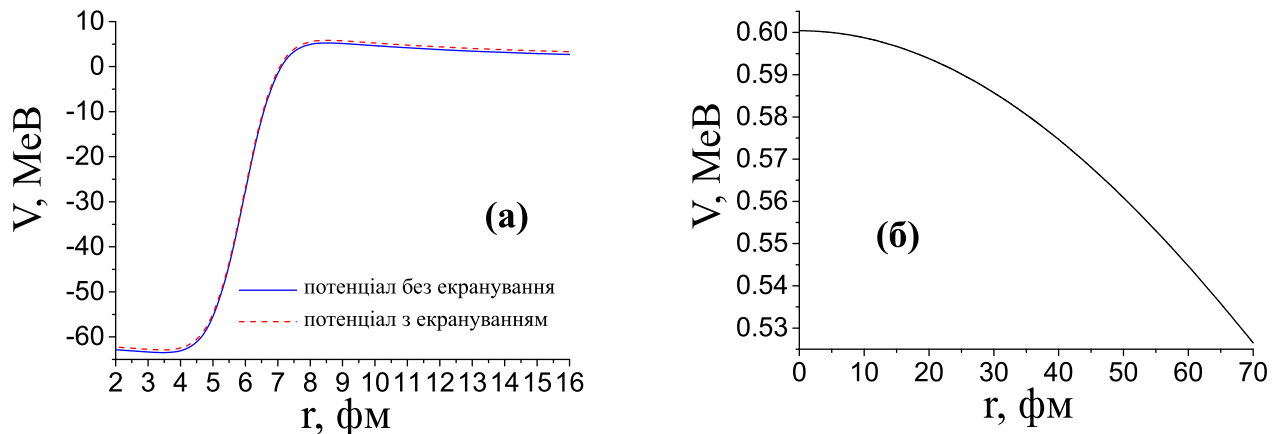


Рис. 1.5.: Потенціал взаємодії між двома ядрами ^{12}C з включенням плазмового екранування та його порівняння з чистим потенціалом взаємодії (а), та вклад плазмового екранування в потенціал (б). Потенціал визначений рівняннями (1.23) та (1.24), плазмове екранування описується рівняннями (1.54)–(1.56).

вання на потенціал не є суттєвим. Можна зробити висновок, що немає впливу на енергії квазізв'язаних станів.

У 1.6 наведено значення енергій нульових коливань, розрахованих для реакції $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$, з урахуванням екранування та без нього.

З цієї таблиці видно, що енергетичний спектр нульових коливань для реакції $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ суттєво змінюється після врахування екранування плазмою.

№	$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ з екрануванням	$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ без екранування
1	0,209619238476954	0,517434869739479
2	0,267334669338677	0,536673346693387
3	0,344288577154309	0,546292585170341
4	0,478957915831663	0,555911823647295
5	0,786773547094188	0,575150300601202
6	2,21042084168337	0,594388777555110
7	3,83607214428858	0,613627254509018
8		0,642484969939880
9		0,680961923847695
10		0,729058116232465
11		0,806012024048096
12		0,911823647294589
13		1,11382765531062
14		2,76833667334669
15	—	4,08617234468938

Табл. 1.6.: Енергії нульових коливань з урахуванням екранування та без.

1.5. Порівняння методу БВВ з ВКБ-наближенням для пікноядерних реакцій

Порівняємо метод БВВ з ВКБ-наближенням, яке використовують у багатьох інших підходах при вивченні пікноядерних реакцій.

Згідно з [51], для визначення проникності бар'єра в ВКБ-наближенні повинні бути виконані наступні дві умови:

1. Умова застосовності напівкласичного наближення в першому порядку, яка випливає з вимоги: *Довжина хвилі не повинна змінюватися сильно в межах свого розміру* (рівняння (46,6) в [51], с. 209). Запишемо

$$\left| \frac{d(\lambda/(2\pi))}{dr} \right| \ll 1, \quad (1.59)$$

де $\lambda/(2\pi)$ — довжина хвилі, й отримаємо

$$\frac{m\hbar}{p^3} \left| \frac{dV(r)}{dr} \right| \ll 1, \quad p = \sqrt{(E - V(r))2m}. \quad (1.60)$$

Тут m та p — це маса та класичний імпульс частинки. З рівняння (1.59) видно, що ВКБ-наближення не застосовне при малих імпульсах (у тунелювальному регіоні) та поблизу точок повороту.

2. Умова заміни напівкласичного ВКБ-наближення на точну формулу поблизу точок повороту, як

$$E - V(r) \approx F_0 \cdot (r - a), \quad F_0 = - \left. \frac{dV(r)}{dr} \right|_{r=a}, \quad (1.61)$$

де a — координата точки повороту.

Функції для оцінки застосовності ВКБ-наближення з рівнянь (1.60), (1.61):

$$U_1(r) = \frac{m \hbar}{p^3} \left| \frac{dV(r)}{dr} \right|, \quad U_1(r) < 1, \\ U_2(r) = \frac{|E - V(r) - F_0 \cdot (r - a)|}{E}, \quad U_2(r) < 1. \quad (1.62)$$

1.5.1. Обмежена застосовність ВКБ-наближення для розрахунку пікноядерних реакцій

Порівняємо застосовність методу БВВ та ВКБ-наближення на прикладі реакції злиття $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} = ^{24}\text{Mg}$.

На рисунку 1.6 показані функції для перевірки ВКБ-наближення, описані рівняннями (1.62). Розрахунки проведені за енергії $E_{\text{kin}} = 5$ МеВ.

Згідно з умовами застосовності ВКБ-наближення, обидві функції U_1 , U_2 повинні бути менші за одиницю. Згідно з рисунком 1.6 поблизу кожної точки повороту ці умови виконуються, отже, ВКБ-наближення для коефіцієнта проникності бар'єра та швидкостей реакції за енергії $E_{\text{kin}} = 5$ МеВ застосовне.

Але для пікноядерних реакцій типовими є енергії менші за 1 МеВ. На рисунку 1.7 зображена поведінка функцій U_1 та U_2 поблизу точок повороту для енергії $E = 1$ МеВ. Видно, що поблизу лівої точки повороту обидві функції U_1 та U_2 більші за одиницю. Це означає, що при розрахунку коефіцієнту проникності бар'єра за ВКБ-наближенням не можна враховувати внутрішню частину потенціалу.

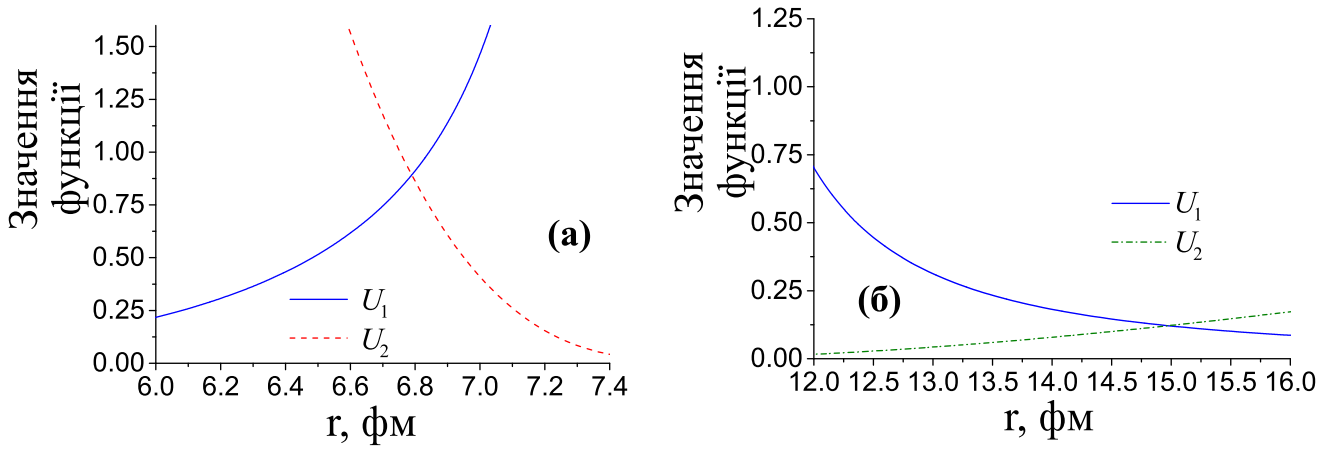


Рис. 1.6.: Функції (1.62) для оцінки застосовності ВКБ-наближення для пікно-ядерної реакції $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} = ^{24}\text{Mg}$ за енергії $E = 5$ МеВ. Потенціал взаємодії визначений рівняннями (1.23) та (1.24), де $r_{\text{tp,in},2} = 7,46$ фм та $r_{\text{tp,out}} = 10,5$ фм — точки повороту за цієї енергії. В області цих точок повороту функції (1.62) менші за одиницю, тобто ВКБ-наближення застосовне.

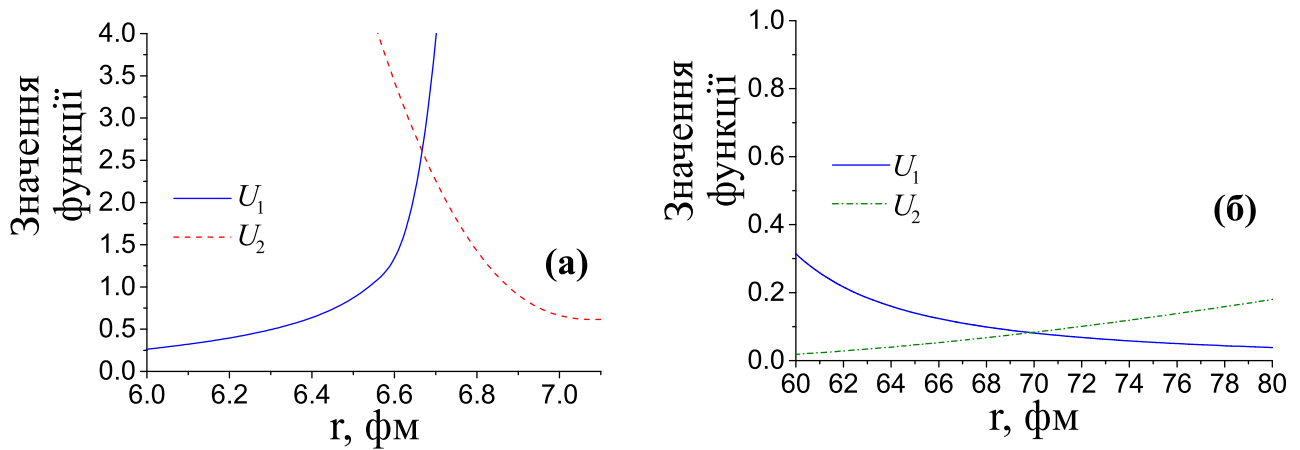


Рис. 1.7.: Функції (1.62) для оцінки застосовності ВКБ-наближення для пікно-ядерної реакції $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} = ^{24}\text{Mg}$ за енергії $E = 1$ МеВ. Потенціал взаємодії визначений рівняннями (1.23) та (1.24), де $r_{\text{tp,in},2} = 6,94$ фм та $r_{\text{tp,out}} = 52,48$ фм — точки повороту за цієї енергії. В цьому випадку функції (1.62) менші за одиницю, лише біля зовнішньої точки повороту, тобто ВКБ-наближення не застосовне для внутрішньої області.

На рисунку 1.8 представлені функції (1.62), коли $U_1 = 1$ та $U_2 = 1$. Тобто, лінії представляють граничну енергію при розсіянні ${}^X\text{C} + {}^X\text{C}$, за якої ще є застосовним ВКБ-наближення біля лівої точки повороту. Як видно з рисунка, ВКБ-наближення застосовне за енергії налітаючого ядра, більшою за 3,5 MeV.

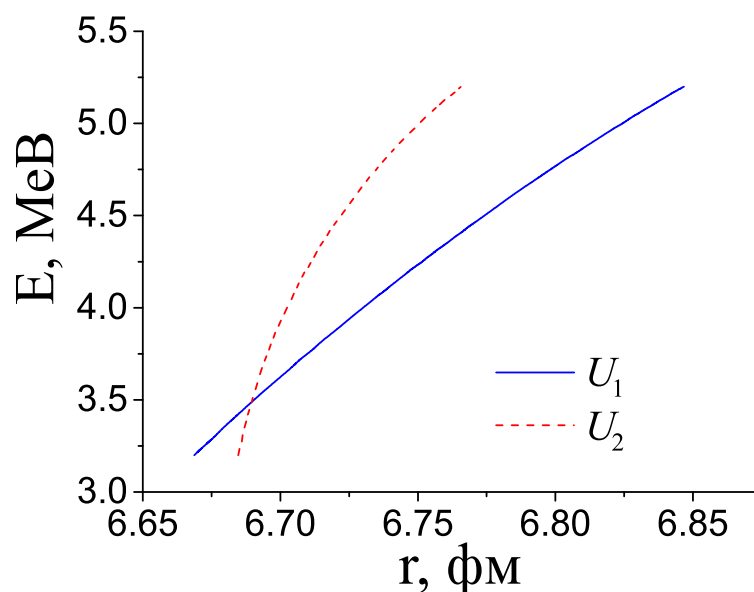


Рис. 1.8.: Зона застосовності ВКБ-наближення визначається областю, яка знаходиться вище за $U_1(E) = 1$ (на рисунку представлена синьою суцільною лінією) та нижче за $U_2(E) = 1$ (червона штрихова лінія). Розрахунки проведені для реакції ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$ в області енергій від 1 до 5,2 MeV. Потенціал взаємодії визначений рівняннями (1.23) та (1.24). Згідно з рисунком, застосовувати ВКБ-наближення має сенс лише коли енергія налітаючого ядра перевищує 3,5 MeV.

1.6. Висновки до розділу 1

В розділі 1 розроблена модель пікноядерних реакцій — реакцій злиття сусідніх атомних ядер в кристалічних ґратках компактних зір. Ця модель дозволяє вивчати такі реакції через проміжну стадію — формування складеного ядра під час синтезу. Для побудови моделі вперше узагальнено метод багаторазових внутрішніх відбиттів (метод БВВ) [24, 25, 38—40].

Побудований формалізм дозволяє розрахувати фізичні величини, що описують пікноядерні реакції: коефіцієнт проникності та відбиття бар'єра при

тунелюванні та надбар'єрному русі, амплітуди розсіяння, ймовірність формування складеного ядра, енергії квазізв'язаних станів та швидкості пікноядерних реакцій. Розрахунки на основі методу БВВ дали нову оцінку швидкостей пікноядерних реакцій та ймовірності для утворення складених ядер при злитті двох ізотопів карбону. Отримані результати [33, 34] порівняні з відомими оцінками швидкостей пікноядерних реакцій, визначеними раніше на основі інших методів [41].

Відмінність швидкостей пікноядерних реакцій від раніше порахованих можна пояснити тим, що метод БВВ враховує квантові потоки у внутрішній області потенціалу. Згідно з рисунком 1.7, ВКБ-наближення в цій області не застосовне. На рисунку 1.8 показано, що враховувати внутрішню область потенціалу у ВКБ-наближенні можна за енергій, більших за 3 MeV, що перевищує типові енергії, за яких відбуваються пікноядерні реакції.

Розраховані енергії квазізв'язаних станів при пікноядерній реакції ізотопів карбону $^X\text{C} + ^X\text{C}$ (де $X = 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24$). Згідно з таблицями 1.1 та 1.2, можна очікувати синтез ізотопів магнію в реакціях $^{10}\text{C} + ^{10}\text{C}$, $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$, $^{24}\text{C} + ^{24}\text{C}$, адже саме в цих реакціях енергія утвореного квазізв'язаного стану менша за висоту потенціального бар'єра. За допомогою методу БВВ отримані нові значення енергетичного спектра нульових коливань атомних ядер в кристалічних ґратках.

Вперше досліджено вплив плазмового екранування на взаємодію двох ізотопів карбону в кристалічній ґратці. Згідно з таблицею 1.6, енергетичний спектр нульових коливань ядер суттєво змінюється при врахуванні плазмового екранування.

Розділ 2.

Гальмівне випромінювання при протон-дейтронному розсіянні

Гальмівне випромінювання, що супроводжує ядерні реакції, є одним з інструментів їх дослідження [31, 32, 52, 53]. Дослідження ядерних процесів та гальмівного випромінювання, що їх супроводжує, дозволяє краще зрозуміти структуру атомних ядер та взаємодію між нуклонами у цих процесах. При теоретичному описі гальмівного випромінювання у формалізмі можна включати взаємодію між нуклонами, квантові ефекти, деформації атомних ядер, гіперядра та ін., як розглянуто у [27, 39, 54, 55] та в багатьох інших дослідженнях.

У цьому розділі буде досліджено гальмівне випромінювання, що виникає при розсіянні протона на дейтроні. Для цього буде використана дво- та три-кластерна моделі [56, 57] для опису системи протон-дейтрон. Використана модель враховує параметр, який входить у хвильову функцію дейтрона, зміна якого впливає на гальмівне випромінювання при цьому процесі.

За результатами будуть отримані хвильові функції дейтрона та $p + d$ системи, порашовані відповідні форм-фактори. Модель буде порівнюватися з експериментальними даними [58] для оцінки її акуратності. Буде досліджений вплив параметрів моделі на гальмівне випромінювання в процесі розсіяння протона на дейтроні.

2.1. Використання дво- та три-кластерної моделей для опису $p + d$ системи

2.1.1. Оператор народження гальмівного фотона

Розглянемо трансляційно-інваріантну взаємодію фотона з тринуклонною системою.

$$\hat{H}_e(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) = \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{m_N c} \sum_{i=1}^{A=3} \frac{1}{2} (1 + \hat{\tau}_{iz}) [\hat{\pi}_i^* \mathbf{A}^*(i) + \mathbf{A}^*(i) \hat{\pi}_i^*], \quad (2.1)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^*(i) &= \varepsilon^{(\alpha)} \exp\{-i(\mathbf{k}_\gamma \rho_i)\}, & \hat{\pi}_i^* &= i\nabla_{\rho_i}, & \rho_i &= \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{CM}}, \\ \mathbf{R}_{\text{CM}} &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \mathbf{r}_i, & \hat{\pi}_i &= \hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{P}}_{\text{CM}}, & \hat{\mathbf{P}}_{\text{CM}} &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \hat{\mathbf{p}}_i. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тут і нижче символ $*$ позначає комплексне спряження. У рівнянні (2.1) $\varepsilon^{(\alpha)}$ — одиничні вектори лінійної поляризації фотона, що випромінюється ($\varepsilon^{(\alpha)*} = \varepsilon^{(\alpha)}$), $\mathbf{k}_\gamma$ — хвильовий вектор фотона, а $w_\gamma = k_\gamma c = |\mathbf{k}_\gamma|c$. Вектори $\varepsilon^{(\alpha)}$ перпендикулярні до $\mathbf{k}_\gamma$ у кулонівському полі. Маємо два незалежні поляризації $\varepsilon^{(1)}$ і $\varepsilon^{(2)}$ для фотона з імпульсом $\mathbf{k}_\gamma$ ($\alpha = 1, 2$).

Вектори поляризації фотона мають наступні властивості:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{k}_\gamma \times \varepsilon^{(1)} \right] &= k_\gamma \varepsilon^{(2)}, \quad \left[\mathbf{k}_\gamma \times \varepsilon^{(2)} \right] = -k_\gamma \varepsilon^{(1)}, \quad \left[\mathbf{k}_\gamma \times \varepsilon^{(3)} \right] = 0, \\ \sum_{\alpha=1,2,3} \left[\mathbf{k}_\gamma \times \varepsilon^{(\alpha)} \right] &= k_\gamma (\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введемо нові змінні, вектори Якобі $\mathbf{r}$ та $\mathbf{q}$ і запишемо перетворення для них

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_1 - \rho_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \\ \mathbf{q} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\rho_3 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\mathbf{r}_3 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right), \\ \mathbf{q}_A &= \sqrt{\frac{1}{3}}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = \sqrt{3}\mathbf{R}_{\text{CM}}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{r} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{q} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{q}_A, \\ \mathbf{r}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{r} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{q} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{q}_A, \\ \mathbf{r}_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{q} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{q}_A.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Теж саме можливо записати для імпульсу (пряме та зворотне перетворення)

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbf{r}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - \pi_2), \\ \pi_{\mathbf{q}} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\pi_3 - \frac{\pi_1 + \pi_2}{2}\right), \\ \pi_A &= \sqrt{\frac{1}{3}}(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3),\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\pi_{\mathbf{r}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\pi_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\pi_A, \\ \pi_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi_{\mathbf{r}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\pi_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\pi_A, \\ \pi_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\pi_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\pi_A.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Тут, вектор $\mathbf{r}$ — вектор між протоном і нейтроном всередині дейтрона, $\mathbf{r}_1$ та $\mathbf{r}_2$ — радіус-вектори до протона та нейтрона в дейтроні, $\mathbf{r}_3$ — радіус-вектор налітаючого протона.

Оператор $\hat{H}e(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)})$ з векторами Якобі набуде наступного вигляду (та-

кож використаємо $(\varepsilon^{(\alpha)}, \mathbf{k}_\gamma) = 0$:

$$\begin{aligned} \hat{H}_e(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) &= \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{m_N c} \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}} \exp \left\{ -i \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{r}}^*) \times \right. \\ &\times \exp \left\{ i \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}) \right\} - \sqrt{\frac{2}{3}} \exp \left\{ -i \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} \exp \left\{ i \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}) \right\} \times \\ &\times (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) + 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \exp \left\{ -i \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) \left. \right\}. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Отримали оператор народження гальмівного протона у тринуклонній системі. Діаграма процесу розсіяння протона на дейтроні та випромінювання гальмівного фотона зображено на рисунку 2.1.

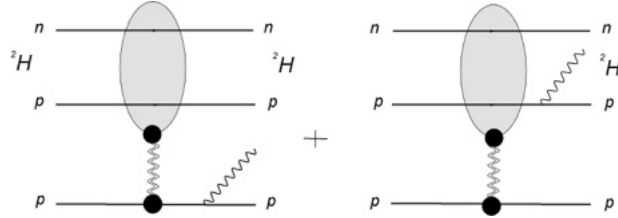


Рис. 2.1.: Діаграма випромінювання гальмівного фотона при розсіянні протона на дейтроні.

Для подальшого дослідження гальмівного випромінювання в процесі розсіяння протона на дейтроні необхідно побудувати модель даного процесу. Для обчислення перерізу гальмівного випромінювання необхідно визначити хвильові функції протона та дейтрона за вибраних енергій у початковому та кінцевому станах. Було обрано метод резонуючих груп (RGM) [7, 59, 60], який є найбільш строгою та самостійною реалізацією кластерної моделі.

2.1.2. Дво- та три-кластерні моделі системи $p + d$

Для дослідження $p + d$ системи побудовано формалізм на основі дво- та три-кластерних моделей. У дво-кластерній моделі загальна хвильова функція системи має вигляд

$$\Psi = \hat{\mathcal{A}} \left\{ \phi^{(S)}(d, \mathbf{r}) \phi(p) \psi_E(\mathbf{q}) \right\}, \quad (2.9)$$

де $\phi^{(S)}(d, \mathbf{r})$ — це хвильова функція дейтрона на основі моделі деформованих осциляторних оболонок, $\phi(p)$ — хвильова функція протона, що представлена

його спіноюю та ізоспіноюю частинами, а $\psi_E(\mathbf{q})$ — хвильова функція відносного руху протона і дейтрона. Оператор антисиметризації $\hat{\mathcal{A}}$ робить хвильові функції системи $p + d$ повністю антисиметричними.

Хвильова функція для $p + d$ системи на основі три-кластерної моделі

$$\Psi = \hat{\mathcal{A}}\{\phi(n)\phi(p_1)\phi(p_2)f(\mathbf{r}, \mathbf{q})\}, \quad (2.10)$$

де $\phi(n)$ та $\phi(p_1)$ — хвильові функції нейтрона та протона в дейтроні, $\phi(p_2)$ — хвильова функція налітаючого протона, $f(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ — хвильова функція відносного руху протона та дейтрона. Ці хвильові функції визначаються розв'язками рівняння Шредінгера або Фадєєва.

В адіабатичному наближенні, коли хвильові функції дейтрона не змінюються при наближенні протона, трьохнуклонна хвильова функція системи може бути представлена як

$$\Psi = \hat{\mathcal{A}}\{\phi(d, \mathbf{r})\phi(p)\psi_E(\mathbf{q})\}, \quad (2.11)$$

де $\phi(d, \mathbf{r})$ — хвильова функція зв'язаного стану дейтрона. Хвильова функція $\phi(d, \mathbf{r})$ є розв'язком рівняння Шредінгера з обраним потенціалом нуклон-нуклонної взаємодії.

Оператор $\hat{\mathcal{A}}$ в рівняннях (2.9) та (2.11) складається з одиничного оператора та двох операторів перестановок в обох моделях. Якщо ігнорувати повну антисиметризацію в рівняннях (2.9) та (2.11), опускаючи оператор $\hat{\mathcal{A}}$, то отримуємо спрощену версію дво- та три-кластерних моделей — folding-модель. Щоб уникнути громіздких виразів, можна використовувати цю апроксимацію для подання матричних елементів оператора $\hat{H}e(\mathbf{k}\gamma, \varepsilon_\mu)$ між початковими та кінцевими станами системи $p + d$.

2.1.3. Хвильові функції системи $p + d$ в кластерному формалізмі

Для побудови хвильових функцій системи $p + d$ в різних моделях необхідно розв'язати відповідні рівняння Шредінгера. Для цієї мети використано алгебраїчну версію методу резонуючих груп (RGM), розроблену в роботах [61,

62]. Ця версія RGM використовує повний базис осциляторних функцій для розкладу хвильових функцій відносного руху кластерів. Як результат, рівняння Шредінгера зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів розкладу. Крім того, алгебраїчна версія реалізує правильні граничні умови в дискретному представленні. Для вивчення системи $p + d$ в три-кластерній моделі використаний підхід описаний в [63].

Необхідно побудувати хвильові функції системи $p + d$ для обчислення матричних елементів оператора $\hat{H}e(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)})$. Якщо ігнорувати принцип Паулі та використовувати адіабатну апроксимацію, то хвильову функцію системи можна записати як

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \phi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{q}), \quad (2.12)$$

де хвильова функція дейтрона $\phi(\mathbf{r})$ є розв'язком рівняння Шредінгера для двох тіл

$$\begin{aligned} (\hat{H}_d - E_d) \phi(\mathbf{r}) &= 0, \\ \hat{H}_d &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\mathbf{r}^2} + \hat{V}_{NN}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

де m — маса нуклона. Якщо потенціал нуклон-нуклон $V_{NN}(\mathbf{r})$ використовується в формі

$$\hat{V}_{NN}(\mathbf{r}) = \sum_{S=0,1} \sum_{T=0,1} V_{2S+1,2T+1}(\mathbf{r}) \hat{P}_S \hat{P}_T, \quad (2.14)$$

де $\hat{P}_S, \hat{P}_T$ — це оператори проєкції спіну S та ізоспіну T двонуклонної системи. Для дейтрона в рівнянні (2.14) $\hat{V}_{NN}(\mathbf{r})$ має бути замінено на парну компоненту $V_{31}(\mathbf{r})$, оскільки його спин $S = 1$ та ізоспін $T = 0$.

Аналогічно, хвильова функція взаємодії протона з дейтроном повинна задовільняти своєму рівнянню Шредінгера:

$$\begin{aligned} (\hat{H}_p - E_p) \psi(\mathbf{q}) &= 0, \\ \hat{H}_p &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\mathbf{q}^2} + \hat{V}_{pd}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

де потенційна енергія $\widehat{V}_{pd}(\mathbf{q})$ рівна

$$\widehat{V}_{pd}(\mathbf{q}) = \left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \sum_{i=1,2} \widehat{V}_{NN}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_i) + \sum_{i=1,2} \widehat{V}_C(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_i) \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle. \quad (2.16)$$

Рівняння (2.15) визначає як початкову хвильову функцію $\psi_{E_i}(\mathbf{q})$, так і кінцеву хвильову функцію $\psi_{E_f}(\mathbf{q})$ системи $p + d$.

2.1.4. Метод резонуючих груп

Для розв'язання рівнянь Шредінгера (2.13) та (2.15) для дейтрона та системи $p + d$, хвильові функції $\phi_{E_d,l}(r)$ та $\psi_{E,L}(q)$ розкладаються по базису осциляторних функцій згідно з [61–63]

$$\begin{aligned} \phi_{E_d,l}(r) &= \sum_{n=0}^{N \max} C_n^{(E_d,l)} \Phi_{nl}(r, b), \\ \psi_{E,L}(q) &= \sum_{n=0}^{N \max} C_n^{(E,L)} \Phi_{nL}(q, b), \end{aligned} \quad (2.17)$$

де $\Phi_n(r, b)$ осциляторна функція

$$\Phi_{nL}(r, b) = (-1)^n N_{nL} b^{-3/2} \rho^L e^{-\frac{1}{2}\rho^2} L_n^{L+1/2}(\rho^2), \quad \rho = \frac{r}{b} \quad (2.18)$$

з b - осциляторною довжиною, та

$$N_{nL} = \sqrt{\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+L+3/2)}}. \quad (2.19)$$

Набір коефіцієнтів розкладу $\{C_n^{(E_d,l)}\}$ можна розглядати як хвильову функцію дейтрона в осциляторному представленні, тоді як коефіцієнти розкладу $\{C_n^{(E,L)}\}$ є хвильовою функцією відносного руху протона та дейтрона в тому ж представленні.

2.2. Гальмівне випромінювання в процесі розсіяння протона на дейтроні

2.2.1. Матричні елементи гальмівного випромінювання у кластерному формалізмі

Для аналізу гальмівного випромінювання необхідно обрахувати наступний матричний елемент для процесу розсіяння протона на дейтроні

$$\left\langle \phi(\mathbf{r}) \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \hat{H}_e(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \phi(\mathbf{r}) \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle. \quad (2.20)$$

Згідно з методами дво- та три-кластерних моделей хвильові функції дейтрона та системи протон-дейтрон є розв'язками двох окремих задач Шредінгера, тож матричний елемент можна розраховувати у два етапи, де на першому етапі розглядається матричний елемент

$$\hat{\mathcal{H}}_e(\mathbf{q}) = \left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \hat{H}_e(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle \quad (2.21)$$

де інтегрування відбувається за вектором $\mathbf{r}$. Використовуючи рівняння (2.8), маємо

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_e(\mathbf{q}) &= \left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \hat{H}_e(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{m_N c} \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}} \left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{r}}^*) \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle \times \right. \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{6}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}) \right\} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{6}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \exp \left\{ -i\sqrt{\frac{2}{3}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} \times \\ &\left. \times (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) \right\}, \quad (2.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \phi(\mathbf{r})\psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \hat{H}_e(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \phi(\mathbf{r})\psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle = \\
& = \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{m_N c} \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}} \left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{r}}^*) \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle \times \right. \\
& \quad \times \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{6}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}) \right\} \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle - \\
& \quad - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle \times \\
& \quad \times \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{6}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle + \\
& \quad \left. + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp \left\{ -i\sqrt{\frac{2}{3}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle \right\}. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

В рівняння (2.23) входить декілька базових інтегралів, які необхідно порахувати:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle, \\
& \left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{r}}^*) \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle, \\
& \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{6}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle, \\
& \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{6}}(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

З вибраною системою координат у рівнянні (2.4) хвильові вектори початкового та кінцевого станів визначаються як $k_i = \sqrt{2mE_i / \hbar^2}$, $k_f = \sqrt{2mE_f / \hbar^2}$, де енергії E_i та E_f в МеВ та в системі центру мас.

2.2.2. Форм-фактори

Введемо наступне визначення форм-факторів дейтрону (в формалізмі кластерної моделі):

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{k}_\gamma) &= \left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle, \\ F_{2,\alpha}(\mathbf{k}_\gamma) &= \left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{r}}^*) \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.25)$$

З їх допомогою матричний елемент гальмівного випромінювання в рівнянні (2.22) можна переписати як

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{E_f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \left| \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \Psi_{E_i}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \right\rangle &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{e \hbar}{m_N c} \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}} \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{6}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}) \right\} \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle \cdot F_{2,\alpha} - \right. \\ &- \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{6}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle \cdot F_1 + \\ &+ 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp \left\{ -i \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

де

$$\begin{aligned} \Psi_{E_i}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= \phi(\mathbf{r}) \psi_{E_i}(\mathbf{q}), \\ \Psi_{E_f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= \phi(\mathbf{r}) \psi_{E_f}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Введемо наступні вирази для матричних елементів

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1(\alpha) &= \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| e^{-i\alpha \mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle_{\mathbf{q}}, \\ I_2(\alpha) &= \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| e^{-i\alpha \mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}} \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle_{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Тоді (2.26) перепишеться як

$$\begin{aligned}
\left\langle \Psi_{E_f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \left| \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \Psi_{E_i}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \right\rangle = \\
= \frac{1}{2} \frac{e \hbar}{m_N c} \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot I_2\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \cdot F_{2,\alpha} - \right. \\
- \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp\left\{\frac{i}{\sqrt{6}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q})\right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle \cdot F_1 + \\
\left. + 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp\left\{-i \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q})\right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle \right\}. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Візьмемо до уваги

$$\pi_{\mathbf{q}} = -i\hbar \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{q}}, \pi_{\mathbf{q}}^* = i\hbar \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{q}}, \quad (2.30)$$

матимемо

$$\left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp\left\{\pm i \alpha' (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q})\right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle = i\hbar \varepsilon^{(\alpha)} \mathbf{I}_1(\mp \alpha'). \quad (2.31)$$

Тоді повний матричний елемент матиме вигляд

$$\begin{aligned}
\left\langle \Psi_{E_f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \left| \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \Psi_{E_i}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \right\rangle = \\
= -\frac{1}{2} \frac{e \hbar}{m_N c} \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}} F_{2,\alpha} \cdot I_2\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) - i\hbar \sqrt{\frac{2}{3}} F_1 \varepsilon^{(\alpha)} \mathbf{I}_1\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \right. \\
\left. + 2 i\hbar \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon^{(\alpha)} \mathbf{I}_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \right\}. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

У випадку нульового форм-фактора $F_{2,\alpha} = 0$, матричний елемент спрощується до виразу

$$\begin{aligned}
\left\langle \Psi_{E_f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \left| \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \Psi_{E_i}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \right\rangle = \\
- i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e \hbar^2}{m_N c} \left\{ F_1 \varepsilon_\mu \mathbf{I}_1\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - 2 \varepsilon^{(\alpha)} \mathbf{I}_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \right\}. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

2.2.3. Мультіпольний розклад

У подальших обчисленнях рівняння (2.33) потрібно знайти інтеграли (2.28). Застосовуючи мультіпольний розклад, ці інтеграли набувають вигляду

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1(\alpha) &= \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| e^{-i\alpha \mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle_{\mathbf{q}} = \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_\gamma=1} (-i)^{l_\gamma} \sqrt{2l_\gamma+1} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_\mu \mu \times \left[p_{l_\gamma\mu}^M(\alpha) - i\mu p_{l_\gamma\mu}^E(\alpha) \right], \\
I_2(\alpha) &= \left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| e^{-i\alpha \mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}} \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle_{\mathbf{q}} = \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_\gamma=1} (-i)^{l_\gamma} \sqrt{2l_\gamma+1} \sum_{\mu=\pm 1} \left[\mu \tilde{p}_{l_\gamma\mu}^M(\alpha) - i \tilde{p}_{l_\gamma\mu}^E(\alpha) \right], \tag{2.34}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
p_{l_\gamma\mu}^M(\alpha) &= -I_M(0, l_f, l_\gamma, 1, \mu) \cdot J_1(\alpha, 0, l_f, l_\gamma), \\
p_{l_\gamma\mu}^E(\alpha) &= \sqrt{\frac{l_C+1}{2l_\gamma+1}} \cdot I_E(0, l_f, l_\gamma, 1, l_\gamma-1, \mu) \times \\
&\times J_1(\alpha, 0, l_f, l_\gamma-1) - \sqrt{\frac{l_\gamma}{2l_\gamma+1}} \cdot I_E(0, l_f, l_\gamma, 1, l_\gamma+1, \mu) \times \\
&\times J_1(\alpha, 0, l_f, l_\gamma+1), \\
\tilde{p}_{l_\gamma\mu}^M(\alpha) &= \tilde{I}(0, l_f, l_\gamma, l_\gamma, \mu) \cdot \tilde{J}(\alpha, 0, l_f, l_\gamma), \\
\tilde{p}_{l_\gamma\mu}^E(\alpha) &= \sqrt{\frac{l_\gamma+1}{2l_\gamma+1}} \tilde{I}(0, l_f, l_\gamma, l_\gamma-1, \mu) \cdot \tilde{J}(\alpha, 0, l_f, l_\gamma-1) - \\
&- \sqrt{\frac{l_\gamma}{2l_\gamma+1}} \tilde{I}(0, l_f, l_\gamma, l_\gamma+1, \mu) \cdot \tilde{J}(\alpha, 0, l_f, l_\gamma+1), \tag{2.35}
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
J_1(\alpha, l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} \frac{dR_i(r, l_i)}{dr} R_f^*(l_f, r) j_n(\alpha k r) r^2 dr, \\
\tilde{J}(\alpha, l_i, l_f, n) &= \int_0^{+\infty} R_i(r) R_f^*(l, r) j_n(\alpha k_\gamma r) r^2 dr.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Тут, ξ_μ — це вектори кругової поляризації з протилежними напрямками обертання (дивись у [64]).

Також маємо наступні властивості

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{I}_1 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_\gamma=1} (-i)^{l_\gamma} \sqrt{2l_\gamma + 1} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu (p_{l_\gamma, \mu}^M + p_{l_\gamma, -\mu}^E), \\
(\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_z) \sum_{\alpha=1,2} [\mathbf{I}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}] &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_\gamma=1} (-i)^{l_\gamma} \sqrt{2l_\gamma + 1} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu (p_{l_\gamma, \mu}^M - p_{l_\gamma, -\mu}^E),
\end{aligned} \tag{2.37}$$

де

$$\begin{aligned}
h_\pm &= \mp \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, h_- + h_+ = -i\sqrt{2}, \\
\sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu &= -h_- + h_+ = -\sqrt{2}, \\
\sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha),*} &= h_{-1} \xi_{-1}^* + h_{+1} \xi_{+1}^*.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

2.2.4. Випадок $l_i = 0, l_f = 1, l_\gamma = 1$

У випадку $l_i = 0, l_f = 1, l_\gamma = 1$ інтеграли (2.34) спрощуються до

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= -i \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_\mu \mu \times [p_{l_\gamma=1, \mu}^M - i\mu p_{l_\gamma=1, \mu}^E], \\
I_2 &= -i \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \sum_{\mu=\pm 1} [\mu \tilde{p}_{l_\gamma=1, \mu}^M - i \tilde{p}_{l_\gamma=1, \mu}^E],
\end{aligned} \tag{2.39}$$

де вирази (2.35) набувають вигляду

$$\begin{aligned} p_{l_{\gamma\mu}}^M &= 0, \quad p_{l_{\gamma\mu}}^E = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J_1(0, 1, 0) - \frac{47}{240} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot J_1(0, 1, 2), \\ \tilde{p}_{1\mu}^M(c) &= \frac{\mu}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \tilde{J}(c, 0, 1, 1), \quad \tilde{p}_{1\mu}^E(c) = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Підставимо ці вирази в рівняння (2.40) і отримаємо

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu} \cdot \left(J_1(0, 1, 0) - \frac{47}{40} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot J_1(0, 1, 2) \right). \quad (2.41)$$

Інтеграли не залежать від векторів поляризації

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \left(J_1(0, 1, 0) - \frac{47}{40} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot J_1(0, 1, 2) \right) (\boldsymbol{\xi}_{\mu=+1} + \boldsymbol{\xi}_{\mu=-1}). \quad (2.42)$$

Також з рівнянь (2.40) знаходимо

$$I_2(\alpha) = -i \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{J}(\alpha, 0, 1, 1). \quad (2.43)$$

2.2.5. Вектори поляризації

Використовується визначення векторів поляризації як в роботі [56]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\xi}_{-1} - \boldsymbol{\xi}_{+1}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\xi}_{-1} + \boldsymbol{\xi}_{+1}), \quad (2.44)$$

та

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \cdot (\boldsymbol{\xi}_{\mu=+1} + \boldsymbol{\xi}_{\mu=-1}) = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \cdot (\boldsymbol{\xi}_{\mu=+1} + \boldsymbol{\xi}_{\mu=-1}) = -i \sqrt{2}. \quad (2.45)$$

З рівняння (2.43) знаходимо:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \cdot \mathbf{I}_1 = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \cdot \mathbf{I}_1(\alpha) = i \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left(J_1(\alpha, 0, 1, 0) - \frac{47}{40} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot J_1(\alpha, 0, 1, 2) \right). \quad (2.46)$$

Тепер можна перерахувати матричний елемент (2.33) як (при $\mu = 1$ він

дорівнює нулю)

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{E_f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \left| \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha=2)}) \right| \Psi_{E_i}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \right\rangle = \\ = \frac{\sqrt{2} e \hbar^2}{12 m_{Nc}} \left\{ F_1 \left[J_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, 1, 0 \right) - \frac{47}{40} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot J_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, 1, 2 \right) \right] - \right. \\ \left. - 2 \left[J_1 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 1, 0 \right) - \frac{47}{40} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot J_1 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 1, 2 \right) \right] \right\}, \quad (2.47) \end{aligned}$$

де інтеграли визначені з рівняння (2.36).

2.2.6. Матричні елементи у фолдінг-наближенні

Згідно з [56] матричні елементи для двох s -кластерів (тобто для кластерів з $1 \leq A_\alpha \leq 4$ або для $n, p, d, {}^3\text{H}, {}^3\text{He}, {}^4\text{He}$) може бути записана як

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{E_f l_f} \left| \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}_\gamma, \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}) \right| \Psi_{E_i l_i} \right\rangle_{\text{fold}} = \frac{e \hbar}{m_{Nc}} \left\{ \sqrt{\frac{A_2}{A_1 A}} \times \right. \\ \times \left\langle R_{E_f l_f}(r) Y_{l_f m_f}(\hat{\mathbf{r}}_i) \left| \exp \left\{ -i \sqrt{\frac{A_2}{A_1 A}} (\mathbf{k}_\gamma, \mathbf{r}) \right\} (\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}, \hat{\boldsymbol{\pi}}) \right| R_{E_i l_i}(r) Y_{l_i m_i}(\hat{\mathbf{r}}_i) \right\rangle F_1 - \\ - \sqrt{\frac{A_1}{A_2 A}} \times \\ \times \left\langle R_{E_f l_f}(r) Y_{l_f m_f}(\hat{\mathbf{r}}_i) \left| \exp \left\{ i \sqrt{\frac{A_1}{A_2 A}} (\mathbf{k}_\gamma, \mathbf{r}) \right\} (\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}, \hat{\boldsymbol{\pi}}) \right| R_{E_i l_i}(r) Y_{l_i m_i}(\hat{\mathbf{r}}_i) \right\rangle F_2 \right\}. \quad (2.48) \end{aligned}$$

В стандартному наближенні методу резонуючих груп, форм-фактор F_n рівний ($n = 1, 2$).

$$F_n = \left\langle \Phi_n(A_n) \left| F_0^{(n)} \right| \Phi_n(A_n) \right\rangle = Z_n \exp \left\{ -\frac{1}{4} \frac{A_n - 1}{A_n} (k, b)^2 \right\}, \quad (2.49)$$

де b - осциляторна довжина. Використовуючи властивість (2.31):

$$\left\langle \psi_{E_f}(\mathbf{q}) \left| \exp \left\{ \pm i \alpha' (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{q}) \right\} (\varepsilon^{(\alpha)}, \pi_{\mathbf{q}}^*) \right| \psi_{E_i}(\mathbf{q}) \right\rangle = i \hbar \varepsilon^{(\alpha)} \mathbf{I}_1(\mp \alpha'), \quad (2.50)$$

можна переписати матричний елемент як

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{E_f l_f} \left| \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \Psi_{E_i l_i} \right\rangle_{\text{fold}} = \\ = i \frac{e \hbar^2}{m_{Nc}} \varepsilon^{(\alpha)} \left\{ \sqrt{\frac{A_2}{A_1 A}} \mathbf{I}_1 \left(\sqrt{\frac{A_2}{A_1 A}} \right) F_1 - \sqrt{\frac{A_1}{A_2 A}} \mathbf{I}_1 \left(-\sqrt{\frac{A_1}{A_2 A}} \right) F_2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Використовуючи властивість (2.46) маємо

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{E_f l_f} \left| \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \Psi_{E_i l_i} \right\rangle_{\text{fold}} = \frac{\sqrt{3} e \hbar^2}{6 m_{Nc}} \left\{ \sqrt{\frac{A_2}{A_1 A}} \left[J_1 \left(\sqrt{\frac{A_2}{A_1 A}}, 0, 1, 0 \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{47}{40} \sqrt{\frac{1}{2}} J_1 \left(\sqrt{\frac{A_2}{A_1 A}}, 0, 1, 2 \right) \right] F_1 - \\ \left. - \sqrt{\frac{A_1}{A_2 A}} \left[J_1 \left(-\sqrt{\frac{A_1}{A_2 A}}, 0, 1, 0 \right) - \frac{47}{40} \sqrt{\frac{1}{2}} J_1 \left(-\sqrt{\frac{A_1}{A_2 A}}, 0, 1, 2 \right) \right] F_2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Зокрема, для протона використаємо позначення $A_1 = 1$, $F_1 = F_p$, для дейтрона — $A_2 = 2$, $F_2 = F_D$ і маємо

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{E_f l_f} \left| \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \Psi_{E_i l_i} \right\rangle_{\text{fold}} = \frac{\sqrt{3} e \hbar^2}{6 m_{Nc}} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \left[J_1 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 1, 0 \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{47}{40} \sqrt{\frac{1}{2}} J_1 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 1, 2 \right) \right] F_p - \\ \left. - \sqrt{\frac{1}{6}} \left[J_1 \left(-\sqrt{\frac{1}{6}}, 0, 1, 0 \right) - \frac{47}{40} \sqrt{\frac{1}{2}} J_1 \left(-\sqrt{\frac{1}{6}}, 0, 1, 2 \right) \right] F_D \right\}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Для подальшого аналізу вираз (2.53) зручно переписати як

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{E_f l_f} \left| \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \Psi_{E_i l_i} \right\rangle_{\text{fold}} = \frac{\sqrt{2} e \hbar^2}{12 m_{Nc}} \left\{ \left[J_1 \left(-\sqrt{\frac{1}{6}}, 0, 1, 0 \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{47}{40} \sqrt{\frac{1}{2}} J_1 \left(-\sqrt{\frac{1}{6}}, 0, 1, 2 \right) \right] F_D - \\ \left. - 2 \left[J_1 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 1, 0 \right) - \frac{47}{40} \sqrt{\frac{1}{2}} J_1 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 1, 2 \right) \right] F_p \right\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.2.7. Визначення перерізу гальмівного випромінювання

Для розрахунку перерізу гальмівного випромінювання використаємо визначення з роботи [56]

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega_{A_1} d\Omega_{A_2} d\Omega_\gamma} = \frac{E_\gamma}{(2\pi\hbar)^4} \left(\frac{p_{1f}}{\hbar c} \right) \frac{\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2}{\sin^5(\theta_1 + \theta_2)} \times \\ \times \frac{1}{2J+1} \sum_{\mu M_i} \left| \left\langle \Psi_{\tilde{E}\tilde{L}} \left| \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}_\gamma, \varepsilon^{(\alpha)}) \right| \Psi_{EL} \right\rangle \right|^2, \quad (2.55)$$

де p_1 — імпульс вхідного ядра (кластера) A_1 , θ_1 та θ_2 — кути розсіювання першого та другого кластерів в лабораторній системі відліку.

Для подальшого аналізу буде чисельно пораховано матричний елемент, що входить в рівняння (2.55) на основі різних підходів, описаних вище.

2.3. Вплив параметрів моделей на гальмівне випромінювання в процесі $p + d$

2.3.1. Хвильова функція дейтрона

Хвильова функція дейтрона повинна бути розв'язком відповідного рівняння Шредінгера (2.13) з вибраним потенціалом. Для потенціалу взаємодії нейтрона та протона в дейтроні обрано потенціал Мінесоти, що описаний в роботі [59]. Енергія зв'язку дейтрона при використанні цього потенціалу рівна $E_d = -2.202$ МеВ. Для побудови хвильової функції дейтрона використовувався метод резонуючих груп, де хвильова функція дейтрона розкладена по базису осциляторних функцій згідно з розкладами в рівнянні (2.17). На рисунку 2.2 наведений вигляд хвильової функції дейтрона та значення коефіцієнтів C_n після розрахунків.

Асимптотична поведінка хвильової функції дейтрона в координатному представленні

$$\phi_{E_d, L=0}(\mathbf{r}) \approx \exp\{-\kappa r\}/r, \quad (2.56)$$

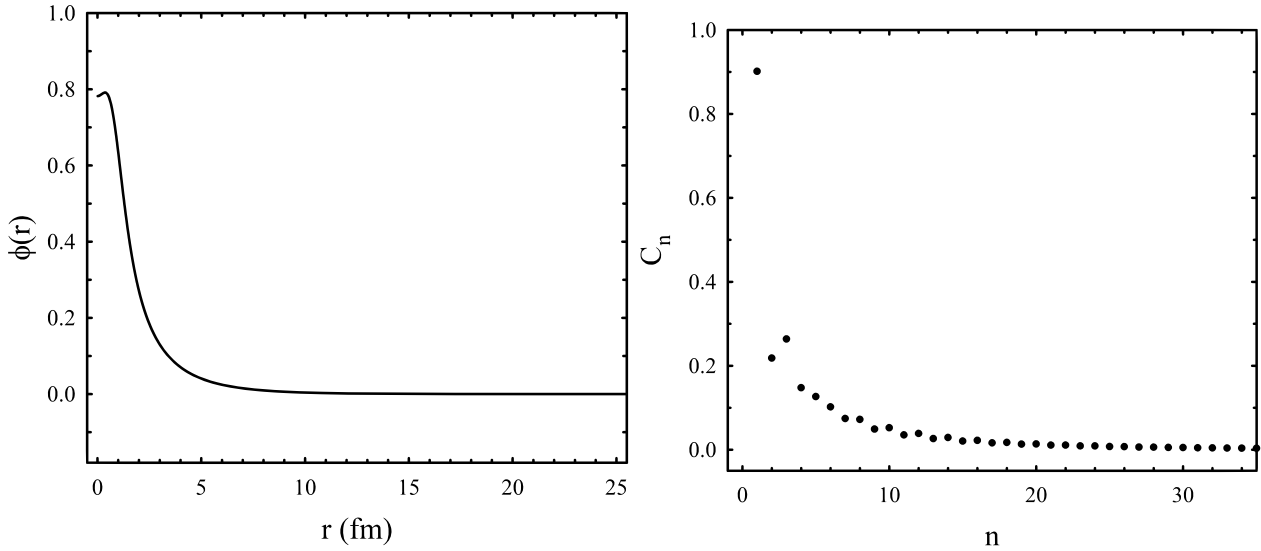


Рис. 2.2.: Хвильова функція дейтрону $\phi(r)$ в координатному просторі (зліва) та в осциляторному просторі C_n (справа) в базисі (2.17).

де

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m|E_d|}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 2,202}{41,47}} = 0,325879 \text{ фм}^{-1}. \quad (2.57)$$

З таким визначенням κ , вектор Якобі r вимірюється в фемтометрах (фм).

Варто відзначити, що функція (2.56) є точним розв'язком двочастинкової задачі з контактною взаємодією

$$V(r) = V_0 \delta(r). \quad (2.58)$$

Цю взаємодію також називають взаємодією нульової відстані та широко використовують в атомній та ядерній фізиці (приклад використання у роботі [65]). Нормована функція при використанні цього потенціалу має вигляд

$$\phi(r) = \sqrt{2\kappa} \exp\{-\kappa r\} / r. \quad (2.59)$$

У дво-кластерній моделі хвильова функція дейтрона збігається з хвильовою функцією в оболонковій моделі

$$\phi(r) = \frac{1}{b^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{b}\right)^2\right\}. \quad (2.60)$$

Явний вигляд форм-фактора дейтрона (2.25) з використанням такої хвильової

функції

$$\left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{8} (k_\gamma b)^2 \right\}. \quad (2.61)$$

Форм-фактор дейтрона при використанні хвильової функції (2.59):

$$\left\langle \phi(\mathbf{r}) \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r}) \right\} \right| \phi(\mathbf{r}) \right\rangle = \frac{2\sqrt{2}\kappa}{k_\gamma} \arctan \left(\frac{k_\gamma}{2\sqrt{2}\kappa} \right). \quad (2.62)$$

Форм-фактор (2.62) повільніше спадає з k_γ в порівнянні з (2.61).

2.3.2. Поведінка хвильової функції та форм-фактора дейтрона

В рівняння (2.55) входить матричний елемент (2.20), поведінка якого залежить від хвильової функції дейтрона у зв'язаному стані. В цьому пункті буде досліджена поведінка хвильової функції дейтрона та його форм-фактор. Хвильова функція дейтрону побудована з використанням потенціалу Міннесоти [59]. Хвильова функція дейтрону побудована з використанням оболонкової моделі (рівняння (2.60) та (2.61)) та кластерної моделі. Результат наведений на рисунку 2.3. Форм-фактори дейтрона наведені на рисунку 2.4.

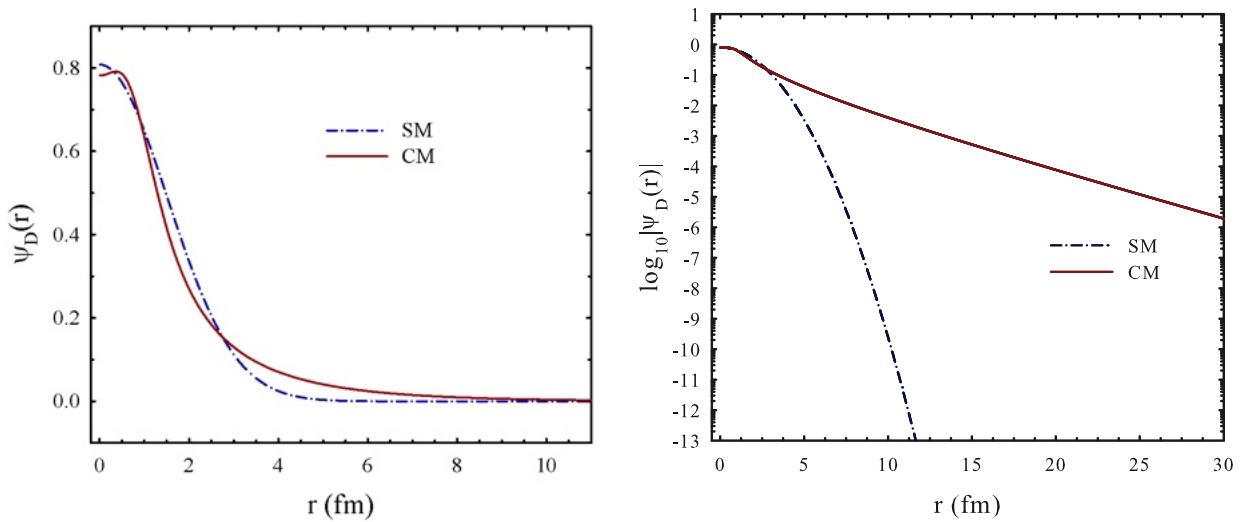


Рис. 2.3.: Хвильові функції дейтрона, пораховані в оболонковій (SM) та кластерній (CM) моделях в натуральному (зліва) та логарифмічному (справа) масштабах.

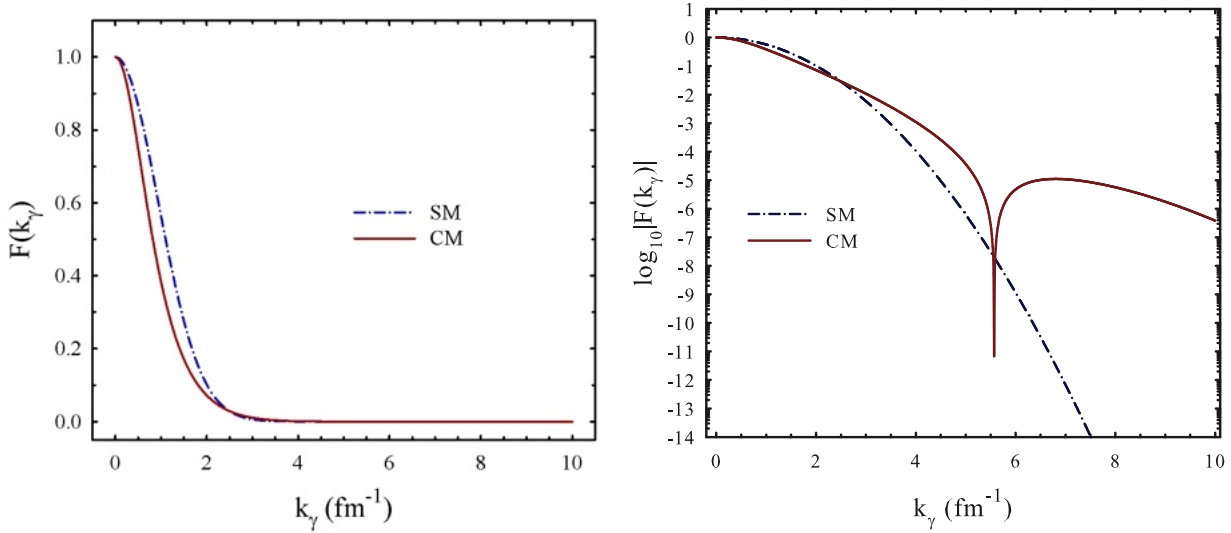


Рис. 2.4.: Форм-фактори дейтрона в оболонковій (SM) та кластерній (CM) моделях в натуральному (зліва) та логарифмічному (справа) масштабах.

На рисунках 2.3 та 2.4 в логарифмічному масштабі добре видно різницю в поведінці хвильової функції дейтрона та його форм-фактора, порохованих з використанням різних моделей.

2.3.3. Хвильові функції $p + d$ системи

Для дослідження взаємодії протона та дейтрона можна побудувати хвильові функції системи які є розв'язком рівняння (2.15). На рисунку 2.5 наведено зсув фаз пружного розсіяння протона на дейтроні. З рисунка видно, що найсильніша взаємодія спостерігається в стані $1/2^+$, що відповідає зв'язаному стану ^3He . Для $E > 100$ MeV зсуви фаз в усіх станах є малими, тож в цій області можна використовувати апроксимацію Борна.

На рисунку 2.6 наведені хвильові функції $p+d$ в станах $1/2^+$ та $1/2^-$ системи в залежності від відстані між налітаючим протоном та дейтроном. Як видно з рисунку, усіх хвильові функції мають велику амплітуду на малих відстанях між кластерами ($r < 5$ фм) та повільно зменшуються як $1/r$. Ці хвильові функції побудовані за процедурою, наведеною в роботах [57, 60].

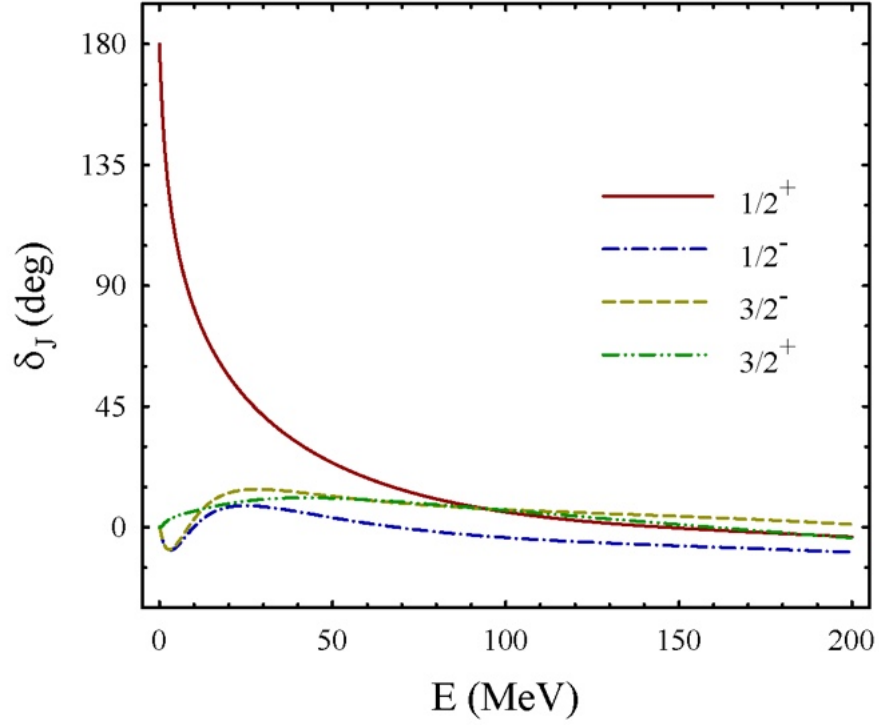


Рис. 2.5.: Зсув фази при пружному $p + d$ розсіянні.

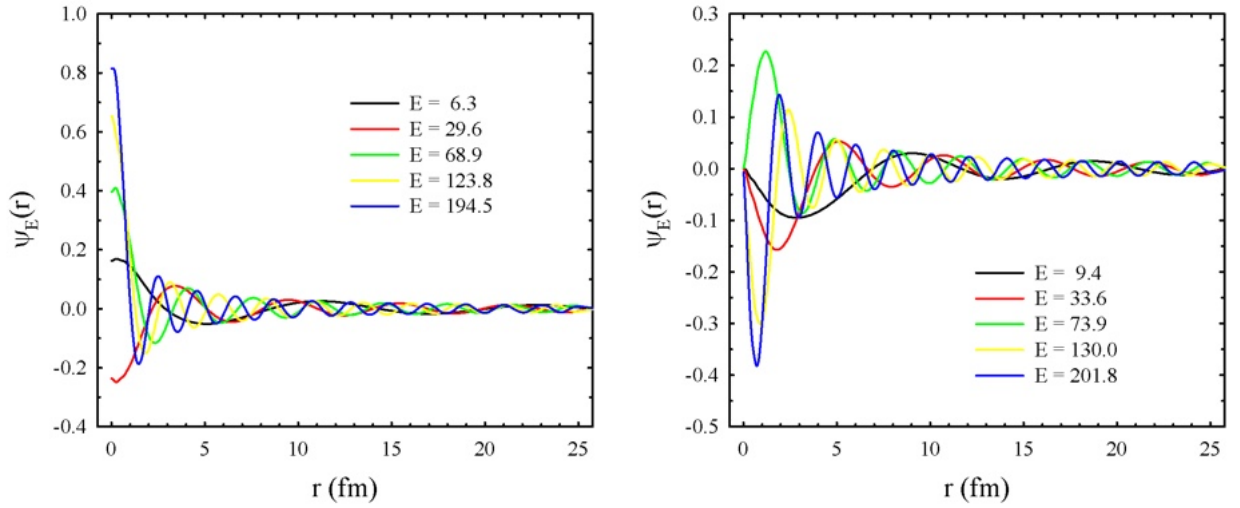


Рис. 2.6.: Хвильові функції неперервного спектра станів при $1/2^+$ (зліва) та $1/2^-$ (справа) станах $p + d$ системи.

2.3.4. Вплив нуклон-нуклонних потенціалів на взаємодію між протоном та дейтроном

В рівняння Шредінгера, яке описує дейтрон (2.13) та взаємодію між протоном та дейтроном (2.15) можна обрати різні потенціали для аналізу. Ці потенціали впливають на побудовані хвильові функції та на зсув фаз при пружному розсіянні протона на дейтроні. В дослідженні було використано наступні потенціали:

- потенціал Волкова (на рисунках позначений VP) [66];
- модифікований потенціал Хасегави-Нагати (позначений MHNP) [67, 68];
- потенціал Міннесоти (позначений MP) [59].

На рисунку 2.7 зображені парні компоненти V_{31} та V_{13} зазначених потенціалів.

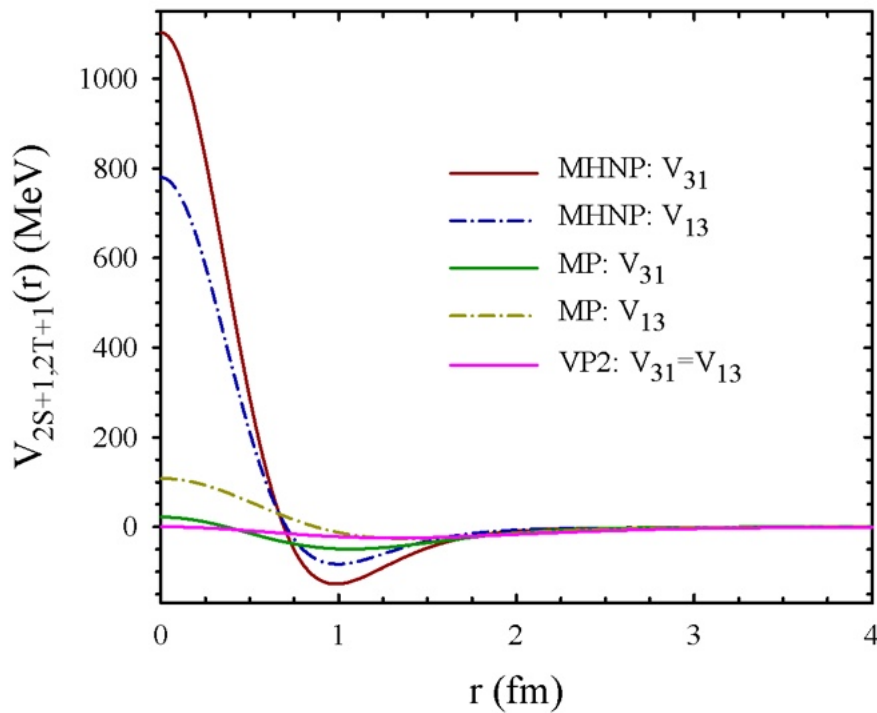


Рис. 2.7.: Парні компоненти V_{31} та V_{13} нуклон-нуклонних потенціалів MHNP, MP та VP як функції відстаней між нуклонами.

Зсув фаз при пружному розсіянні $p + d$ зображений на рисунку 2.8 з урахуванням різних потенціалів взаємодії між протоном та дейтроном. На рисунку 2.8 зліва видно, що зсув фаз в стані $1/2^+$ слабо залежить від обраного

нуклон-нуклонного потенціалу, особливо при $E < 50$ MeV. На тому ж рисунку справа наведений зсув фаз в стані $1/2^-$ і за цих енергій вони демонструють резонансно-подібну поведінку. Оцінка ширини таких станів менша за 20 MeV, а амплітуди їх малі, отже, такі стани не можуть вважатися резонансними. Стан $1/2^+$ та $1/2^-$ можуть бути пов'язані між собою оператором дипольного переходу.

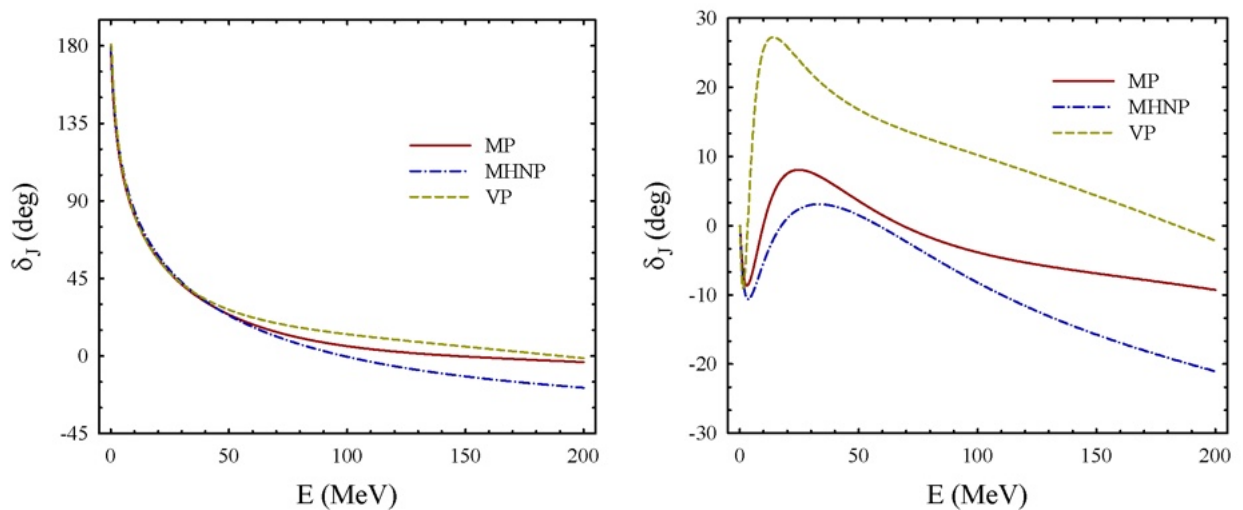


Рис. 2.8.: Зсув фази при $p + d$ розсіянні в $1/2^+$ (зліва) та $1/2^-$ (справа) станах, пораховані в трьох різних нуклон-нуклонних потенціалах.

На рисунку 2.9 наведені хвильові функції $p + d$ системи, розрахованими на основі трьох різних потенціалів при енергії в системі центра мас $E = 147$ MeV. Хвильові функції системи мало відрізняються при використанні різних нуклон-нуклонних потенціалів, різниця між ними помітна тільки на малих відстанях між протоном та дейтроном ($r < 1$ фм на рисунку справа, для стану $1/2^+$). На цьому ж рисунку зліва зображені хвильові функції в стані $1/2^-$, і вони мають помітні максимуми при малих відстанях між протоном та дейтроном ($0,8 < r < 2,5$ фм).

2.3.5. Залежність перерізу гальмівного випромінювання від параметрів моделі дейтрона

Хвильова функція дейтрона (2.60) містить в собі осциляторний параметр b і можна дослідити його вплив на гальмівне випромінювання згідно з (2.55).

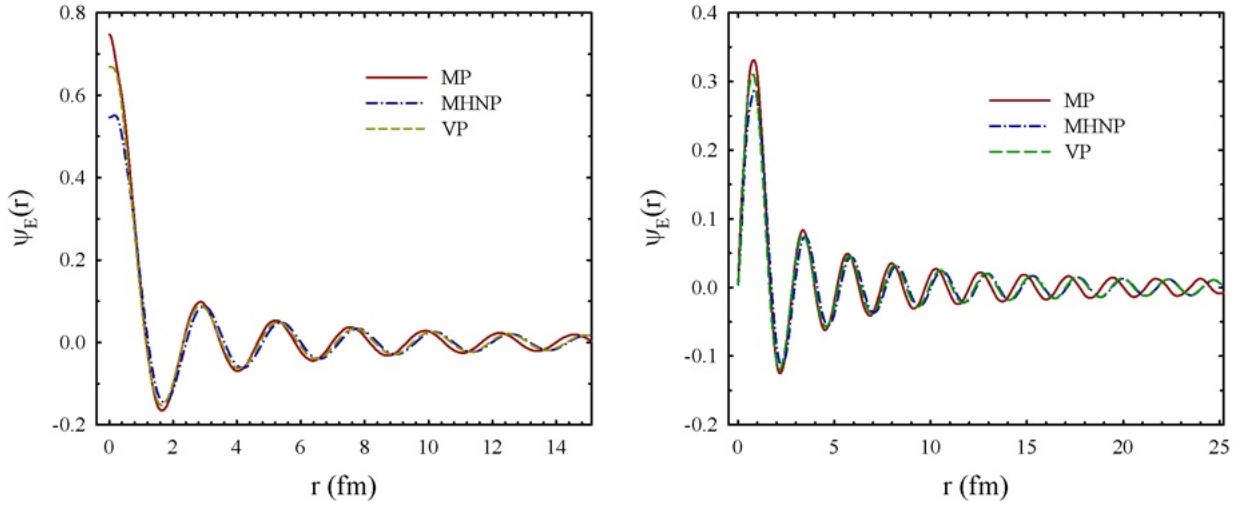


Рис. 2.9.: Хвильова функція $p + d$ системи в станах $1/2^+$ (зліва) та $1/2^-$ (справа) за енергії $E = 147$ MeV.

Використовуючи параметр b як варіаційний у дво-кластерній моделі, є можливість дослідити його вплив на гальмівне випромінювання, що супроводжує розсіяння протона на дейтроні. Оптимальне значення цього параметра можна визначити з порівняння теоретичних та експериментальних даних для різних енергій протон-дейтронних зіткнень.

Деяка інформація про структуру дейтрону включена в його форм-факторі, який отримано в фолдінг-наближенні (2.49) та кластерних моделях (2.61).

На рисунку 2.10 представлені результати розрахунків для різних енергій в системі центра мас для процесу розсіяння протона на дейтроні. Також на рисунку 2.10 проведені розрахунки для енергії $E = 145$ MeV та порівнянні з експериментальними даними, узятимися з роботи [58] (пучок дейтронів на протонну мішень). При високих енергіях пучка протонів помітний вплив осциляторного параметра b , що входить в форм-фактор дейтрона (2.61).

2.4. Висновки до розділу 2

В розділі 2 було побудовано модель дейтрона на основі дво- та три-кластерних моделей та досліджено вплив параметрів моделі на гальмівне випромінювання, що супроводжує процес розсіяння протона на дейтроні.

У дво-кластерній моделі хвильова функція дейтрону (2.60) містить в собі осциляторний параметр b . Було досліджено його вплив на гальмівне випромі-

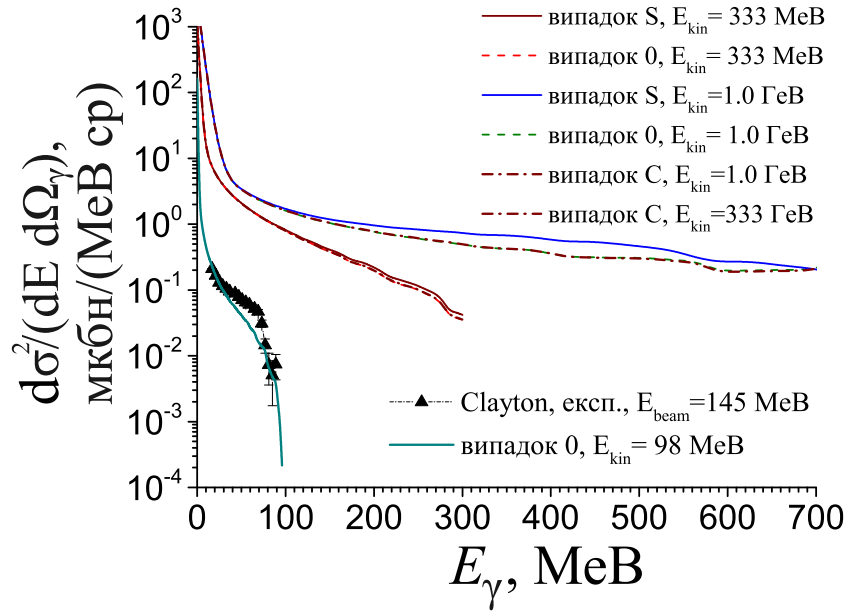


Рис. 2.10.: Переріз гальмівного випромінювання для $p + d$ процесу, розрахована за формулою (2.55) з форм-факторами, визначеними рівняннями (2.61) з $b = 1, 3$ фм (позначений S на рисунку), (2.61) з $b = 0$ фм (позначений 0) та (2.62) (позначений C). Розрахунки були проведені для енергій пучка дейтронів 145 MeV, 500 MeV та 1,5 GeV.

нювання, розраховане за допомогою рівняння (2.55). Також було досліджено вплив різних потенціалів на хвильові функції дейтрону та системи протон-дейтрон, які зображені на рисунках 2.5, 2.6, 2.8 та 2.9.

Порівняння моделі з експериментом [58] показало гарний збіг розрахунків з даними. Модель показує малу чутливість форми спектра гальмівного випромінювання до параметра b моделі за таких енергій. Вплив цього параметра на переріз збільшується при збільшенні енергії пучка протонів.

Розділ 3.

Вплив середовища компактних зір на спектр гальмівного випромінювання при розсіянні нуклонів на атомних ядрах

У цьому розділі досліджуються властивості атомних ядер в середовищі компактних зір — білих карликів та нейтронних зір [1] — а також гальмівне випромінювання, що супроводжує процеси розсіяння нуклонів на атомних ядрах в такому середовищі. Для виконання такого дослідження була побудована теоретична модель опису атомних ядер, яка містить в собі доданки, що описують середовище компактної зорі.

Для побудови моделі атомних ядер використовується модель деформованих осциляторних оболонок (ДОО) [69], яка підходить для розрахунку енергії зв'язку атомних ядер з деформаціями. Модель ДОО легко модифікується для застосування у компактних зорях. Для цього в її гамільтоніан буде включений доданок, який описує середовище зорі через умову рівноваги між гравітацією й тиском.

Модель ДОО, хоч і є одною з найпростіших для опису атомних ядер через розв'язок багатонуклонної задачі у квантовій механіці, дозволяє дуже швидко розраховувати їх енергію зв'язку. Енергія зв'язку вибрана ключовим параметром для дослідження атомних ядер, адже саме вона дозволяє швидко зрозуміти, чи можуть нуклони утворювати зв'язаний стан. Також модель дуже

просто модифікувати для дослідження впливу середовища компактних зір на енергію зв'язку атомних ядер.

Існують інші моделі, які точніше описують атомні ядра в середовищі зір, але часто такі моделі вимагають великого процесорного часу для чисельних розрахунків чи наявності суперкомп'ютерів. Як приклад, можна навести підхід Ab Initial calculations [22], який точніше описує атомні ядра, але вимагає застосування суперкомп'ютерів.

Популярні також моделі опису атомних ядер в середовищі компактних зір на основі теорії середнього поля (RMF) [10, 11, 20, 21]. Хоч такі моделі вже враховують релятивістські ефекти, які повинні бути присутніми в нейтронних зорях, такий підхід не дозволяє дослідити саме енергії зв'язку атомних ядер.

Ключовим для опису компактних зір буде вибір відповідного рівняння стану речовини. В найпростішому варіанті рівняння політропи добре описує зорі неважкі зорі головної послідовності, як Сонце, так і білі карлики. Для кращого опису білих карликів доцільно буде використовувати рівняння Лейна-Емдена [1], яке врівноважує тиск виродженого електронного газу та силу гравітації. Рівняння також можна використати й для опису нейтронних зір [1, 48], в такому випадку рівновага буде між виродженим нейтронним газом та гравітацією. Для покращення моделі також буде використане рівняння Толмена-Оппенгеймера-Волкова, яка вважається кращим для опису нейтронних зір [48].

З побудованою моделлю буде розрахована енергія зв'язку атомних ядер ^4He , ^8Be , ^{12}C , ^{16}O , ^{24}Mg , ^{40}Ca та ^{56}Fe . Вибрані саме ці ізотопи, адже згідно з сучасними уявленнями, саме з них можуть складатися білі карлики [1, 2] та кора нейтронних зір [48]. Окрім того, буде можливим дослідити зміну енергії зв'язку атомних ядер в залежності від глибини його занурення в середовище компактної зорі. Буде показано, що в нейтронних зорях існує гранична глибина, на якій енергія зв'язку атомного ядра стає додатною, тобто вже не можна говорити про зв'язаний стан нуклонів.

Також в розділі буде досліджено гальмівне випромінювання, що виникає при розсіянні протонів та нейтронів на атомних ядрах в середовищі компактних зір. Буде показано, що в нейтронних зорях вплив матерії зорі на атомне ядро істотно змінює перерізи гальмівного випромінювання при цих процесах.

3.1. Модель деформованих осциляторних оболонок та її модифікація для опису атомних ядер в середовищі компактних зір

3.1.1. Модель деформованих осциляторних оболонок (ДОО)

Гамільтоніан моделі деформованих осциляторних оболонок, який описує атомне ядро, що складається з Z протонів, $A - Z$ нейтронів, та містить в собі кінетичну складову, кулонівську та ядерну взаємодію

$$\hat{H} = \hat{T} - \hat{T}_{\text{cm}} + \sum_{i>j=1}^A \hat{V}(ij) + \sum_{i>j=1}^Z \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (3.1)$$

де $\hat{T}$ — кінетична енергія ядра, є сумою кінетичної енергії окремих нуклонів в ядрі, $\hat{T}_{\text{cm}}$ — кінетична енергія центру мас атомного ядра, e — заряд електрона, $\mathbf{r}_i$ — радіус-вектор кожного нуклона.

У даній моделі використовуються двонуклонні ядерні сили, побудовані на перестановочних операторах спіну та ізоспіну [51]

$$\begin{aligned} \hat{V}(ij) = & V_{33} \hat{P}_{\sigma}^{+}(ij) \hat{P}_{\tau}^{+}(ij) + V_{31} \hat{P}_{\sigma}^{+}(ij) \hat{P}_{\tau}^{-}(ij) + \\ & + V_{13} \hat{P}_{\sigma}^{-}(ij) \hat{P}_{\tau}^{+}(ij) + V_{11} \hat{P}_{\sigma}^{-}(ij) \hat{P}_{\tau}^{-}(ij). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Дія операторів перестановки на спіновий та ізоспіновий стан двох нуклонів

$$\hat{P}_{\alpha}^{\pm} |ij\rangle = \frac{1}{2} \left(\hat{1} \pm (\hat{i} \hat{j}) \right) |ij\rangle = \frac{1}{2} |ij\rangle \pm \frac{1}{2} |ji\rangle, \quad \alpha = \sigma, \tau. \quad (3.3)$$

Тут $|ij\rangle$ відповідає спіновій чи ізоспіновій хвильовій функції двох нуклонів.

Для знаходження енергії зв'язку — матричного елемента гамільтоніану, необхідно мати хвильові функції, які описують ядро як систему окремих нуклонів. Для багаточастинкової хвильової функції атомного ядра природно ви-

користати детермінант Слейтера, складений з хвильових функцій окремих нуклонів [69]

$$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_p (-1)^{\varepsilon_p} \varphi_{\lambda_1}(1) \dots \varphi_{\lambda_A}(A), \quad (3.4)$$

де ε_p — показник степеню при розкритті визначника, а одночастинкові хвильові функції $\varphi_\lambda(i)$ виражаються через добуток хвильової функції осцилятора на спін-ізоспінкову функцію нуклонів

$$\varphi_\lambda(i) = \frac{\exp\left\{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right]\right\}}{\pi^{3/4} \sqrt{abc} \sqrt{2^{n_x+n_y+n_z} n_x! n_y! n_z!}} H_{n_x}\left(\frac{x}{a}\right) H_{n_y}\left(\frac{y}{b}\right) H_{n_z}\left(\frac{z}{c}\right) |\sigma^{(i)} \tau^{(i)}\rangle, \quad (3.5)$$

де $\mathbf{r}_i = (x, y, z)$ — радіус вектор нуклона в системі центру мас, a, b, c — осциляторні довжини, параметри які необхідні для пошуку енергії зв'язку атомного ядра, n_x, n_y, n_z — параметри конфігураційного стану по осях, $H_{n_x}, H_{n_y}, H_{n_z}$ — поліноми Ерміта, $\sigma^{(i)}$ та $\tau^{(i)}$ приймають значення $\pm 1/2$.

Для знаходження повної енергії атомного ядра необхідно знайти матричний елемент

$$E(a, b, c) = \langle \Psi_A | \hat{H} | \Psi_A \rangle. \quad (3.6)$$

Таким чином, знайдено вираз для повної енергії атомного ядра як функцію від осциляторних довжин a, b та c . Пошук енергію зв'язку ядра проводиться за допомогою мінімізації отриманого виразу за цими параметрами

$$B = \min E(a, b, c). \quad (3.7)$$

У загальному випадку матричний елемент можна переписати через так звані матриці густини.

Залишемо загальні вирази окремо для кожного виду енергії [69]. Для кіне-

тичної енергії маємо

$$\begin{aligned}
T - T_{\text{cm}} &= \langle \Psi_A | -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 + \frac{\hbar^2}{2Am} \left(\sum_{i=1}^A \nabla \right)^2 | \Psi_A \rangle = \\
&= \frac{A-1}{4} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{\hbar^2}{m} \left[\sum_{s=1}^{Z/2} \left(\frac{n_x^s}{a^2} + \frac{n_y^s}{b^2} + \frac{n_z^s}{c^2} \right) + \sum_{s'=1}^{N/2} \left(\frac{m_x^{s'}}{a^2} + \frac{m_y^{s'}}{b^2} + \frac{m_z^{s'}}{c^2} \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.8}$$

для кулонівської енергії

$$\begin{aligned}
U_{\text{coul}} &= \langle \Psi_A | \hat{H} | \Psi_A \rangle = 2 \int F_p(n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) F_p(n; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 - \\
&\quad - \int F_p^2(n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

для ядерної енергії

$$\begin{aligned}
U_{\text{Nu}} &= \langle \Psi_A | \sum_{i>j=1}^A \hat{V}(ij) | \Psi_A \rangle = \int F_p(n, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1) F_p(n, \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2) \frac{3V_{33} + V_{13}}{2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 - \\
&\quad - \int F_p^2(n, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) \frac{3V_{33} - V_{13}}{2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \\
&\quad + \int F_p(n, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1) F_n(m, \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2) \frac{3V_{33} + 3V_{31} + V_{11} + V_{13}}{2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 - \\
&\quad - \int F_p(n, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) F_n(m, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) \frac{3V_{33} - 3V_{31} + V_{11} - V_{13}}{2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \\
&\quad + \int F_n(m, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1) F_n(m, \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2) \frac{3V_{33} + V_{13}}{2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 - \\
&\quad - \int F_n^2(m, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) \frac{3V_{33} - V_{13}}{2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Тут, F_p , F_n — матриці протонної та нейтронної густин відповідно (розрахову-

s	1	2	3	4	5	6	7	8	...
n_x	0	1	0	0	2	0	0	1	...
n_y	0	0	1	0	0	2	0	1	...
n_z	0	0	0	1	0	0	2	0	...

Табл. 3.1.: Конфігураційний стан атомного ядра.

ються через радіальну частину одночастинкових функцій):

$$\begin{aligned}
 F_p(n; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) &= \sum_{s=1}^{Z/2} \psi_{n_x^s n_y^s n_z^s}^*(\mathbf{r}_i) \psi_{n_x^s n_y^s n_z^s}(\mathbf{r}_j), \\
 F_n(m; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) &= \sum_{s=1}^{N/2} \psi_{n_x^s n_y^s n_z^s}^*(\mathbf{r}_i) \psi_{n_x^s n_y^s n_z^s}(\mathbf{r}_j),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

де Z – число протонів в ядрі, N – число нейтронів.

Стан конфігурації задається комбінацією параметрів n_x , n_y , n_z , що показано в таблиці 3.1

Для нуклон-нуклонного потенціалу використовується наближення як у [70]

$$V_{31}(r) = -3V_{33}(r) = -V_t e^{-r^2/\mu_t^2}; \quad V_{13}(r) = -\frac{1}{3}V_{11}(r) = -V_s e^{-r^2/\mu_s^2}, \tag{3.12}$$

де значення параметрів $V_t = 72,5$ MeB, $\mu_t = 1,47$ фм, $V_s = 39,15$ MeB, $\mu_s = 1,62$ фм.

3.1.2. Включення середовища компактних зір в гамільтоніан моделі деформованих осциляторних оболонки

Для дослідження впливу середовища компактної зорі на атомне ядро необхідно включити взаємодію матерії на нуклони в ядрі. Для цього в гамільтоніан моделі ДОО введемо доданок, який описує цю взаємодію

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \sum_{i,j=1}^A \hat{V}_{\text{star}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \tag{3.13}$$

де $\hat{H}_0$ — гамільтоніан моделі деформованих осциляторних оболонок з рівняння (3.1), $V_{\text{star}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ — потенціал, який описує взаємодію навколишнього середовища зорі на атомне ядро, $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ — радіус вектори нуклонів в атомному ядрі.

Вважаємо, що вплив матерії на нуклони рівномірний по всій поверхні атомного ядра. Тоді можна буде використати квазікласичний підхід для опису потенціалу

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \quad (3.14)$$

В такому випадку сила, що діє на атомне ядро, не залежить від напрямку дії. Тоді, згідно з логікою, викладеною в [51], можна знайти потенціал

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F} \int d\mathbf{r} = -(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.15)$$

де сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}(R)$ — сила, яку можна отримати з рівняння стану матерії компактної зорі, та залежить лише від відстані до центру зорі. Маємо

$$V_{\text{star}}(R, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = +|\mathbf{F}(R) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)|. \quad (3.16)$$

Знак «+» у рівнянні (3.16) обраний з міркувань, що зовнішній потенціал, спричинений середовищем компактної зорі, повинен заважати нуклонам вирватися з атомного ядра при збільшенні відстані між ними [51]. Маємо матричний елемент, за яким буде розраховуватися вклад матерії зорі в повну енергію атомного ядра

$$\Delta E_{\text{star}} = \langle \Psi_A | \sum_{i,j=1}^A V_{\text{star}}(R, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) | \Psi_A \rangle. \quad (3.17)$$

Використовуючи властивість

$$\begin{aligned} \langle \Psi_A | \hat{V}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) | \Psi_A \rangle = \\ = \frac{1}{A(A-1)} \sum_{k=1}^A \sum_{m=1, m \neq k}^A \left\{ \langle \varphi_k(i) \varphi_m(j) | \hat{V}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) | \varphi_k(i) \varphi_m(j) \rangle - \right. \\ \left. - \langle \varphi_k(i) \varphi_m(j) | \hat{V}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) | \varphi_m(i) \varphi_k(j) \rangle \right\}. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Тут сумування відбувається за всіма станами конфігурації ядра (згідно з таблицею 3.1), що представлені індексами k та m , Хвильова функція одного ядра є добутком радіальної хвильової функції та спін-ізоспінової з рівняння (3.5): $\varphi_{\lambda_s}(s) = \phi_{n_s}(\mathbf{r}_s)|\sigma^{(s)}\tau^{(s)}\rangle$. Тоді рівняння прийме вигляд

$$\begin{aligned} \langle \Psi_A | \hat{V}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) | \Psi_A \rangle = \\ = \frac{1}{A(A-1)} \sum_{k=1}^A \sum_{m=1, m \neq k}^A \left\{ \langle \phi_k(\mathbf{r}_i) \phi_m(\mathbf{r}_j) | \hat{V}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) | \phi_k(\mathbf{r}_i) \phi_m(\mathbf{r}_j) \rangle - \right. \\ - \langle \phi_k(\mathbf{r}_i) \phi_m(\mathbf{r}_j) | \hat{V}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) | \phi_m(\mathbf{r}_i) \phi_k(\mathbf{r}_j) \rangle \langle \sigma^{(k)}(i) | \sigma^{(m)}(j) \rangle \langle \sigma^{(m)}(i) | \sigma^{(k)}(j) \rangle \cdot \\ \cdot \langle \tau^{(k)}(i) | \tau^{(m)}(j) \rangle \langle \tau^{(m)}(i) | \tau^{(k)}(j) \rangle \}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Спін-ізоспінові функції ортогональні

$$\begin{aligned} \langle \sigma^{(k)}(i) | \sigma^{(m)}(j) \rangle &= \delta_{km}, \\ \langle \tau^{(k)}(i) | \tau^{(m)}(j) \rangle &= \delta_{km}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Наприклад, для ${}^4\text{He}$ матимемо

$$\langle \Psi({}^4\text{He}) | \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j | \Psi({}^4\text{He}) \rangle = \int F_0^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (3.21)$$

де

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) &= F_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)({}^4\text{He}) = F_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)({}^4\text{He}) = \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2}\right)\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2}\right)\right]}{\pi^{3/2}abc}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

матриці протонної чи нейтронної густини для ${}^4\text{He}$. Тоді для сферично-

симетричного ядра ${}^4\text{He}$ внесок в повну енергію від взаємодії з середовищем

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{star}}({}^4\text{He}) &= \mathbf{F}(R) \cdot \sum_{i,j=1}^{A=4} \langle \Psi({}^4\text{He}) | \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j | \Psi({}^4\text{He}) \rangle = \\ &= 12 \cdot \mathbf{F}(R) \int F_0^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = \left| a = b = c \right| = 12 \cdot \mathbf{F}(R) \frac{1}{\pi^3 a^6} \cdot \\ &\cdot \int \exp \left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + z_1^2 + z_2^2}{a^2} \right] r_{12} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = \frac{12 \cdot 2^{3/2} a}{\pi^{1/2}} \cdot F(R). \quad (3.23)\end{aligned}$$

Для знаходження сили $\mathbf{F} = \mathbf{F}(R)$, з яким середовище діє на атомне ядро, найлегшим буде використати класичний вираз

$$F(R) = P(R)S, \quad (3.24)$$

сили тиску, що діє на поверхню атомного ядра по нормалі до неї. Сам тиск буде визначений з рівняння стану, підбраного для кожного типу компактної зорі.

У випадку сферично-симетричних атомних ядер (як приклад, ядро ${}^4\text{He}$) площа поверхні ядра визначається як

$$S = 4\pi r^2, \quad r = aA^{1/3}, \quad (3.25)$$

де a — осциляторна довжина. Хоч і для більшості атомних ядер енергія зв'язку в моделі ДОО досягається за умови аксіальної деформації, коли $a = b \neq c$, для спрощення моделі та розрахунків всі атомні ядра вважатимуться сферично-симетричними.

Наступним кроком буде вибір рівняння стану, яке описує матерію компактної зорі.

3.2. Опис компактних зір для модифікації моделі деформованих осциляторних оболонок

Дослідження властивостей атомних ядер в компактних зорях потребує правдивого опису таких астрономічних об'єктів. До компактних зір відносять зорі з густинами речовини, які перевищують густину матерії звичайних зір [48]. Зазвичай такі об'єкти утворюються в кінці життєвого циклу зір головної послідовності або внаслідок взаємодії в подвійних системах.

До найбільш поширених компактних об'єктів відносять білі карлики та нейтронні зорі. Також до цього класу об'єктів відносять чорні діри та більш екзотичні зорі, наприклад, кваркові. Дослідження зосереджене на білих карликах та нейтронних зорях, адже саме в них, згідно з сучасними уявленнями, можуть існувати атомні ядра, що перебувають в екстремально щільному середовищі.

Розглянемо загальноприйнятну будову нейтронних зір. В середині такого об'єкту можна виділити дві якісно різні області: зовнішню оболонку та внутрішнє ядро (схема Гінзбурга [48]). На сьогодні існує багато гіпотез про стан речовини в ядрі нейтронної зорі, передбачають нейтронну речовину, рівняння стану якої все ще не підтверджене.

Оболонку нейтронної зорі зазвичай ділять на тверду кору, яка має кристалічну будову та складається з атомних ядер, та внутрішній шар, що являє собою рідину, яка являє собою кулонівський кристал.

Тверду кору ділять на внутрішню і зовнішню, де у внутрішній області атомні ядра знаходяться в морі вільних нейтронів та електронів, тоді як в зовнішній вільних нейтронів немає.

Таким чином, в нейтронній зорі існують області, де можуть існувати окремі атомні ядра, які перебувають в екстремальних умовах.

3.2.1. Рівняння стану

На відміну від зір головної послідовності, температури ядер яких сягають сотні мільярдів та трильйонів градусів кельвіна, нейтронні зорі та білі карлики мають відносно невелику температуру в десятки тисяч градусів кельвіна.

Одне з найпопулярніших наближень описує такі об'єкти як зорі нульової температури. За цих умов лише тиск матерії заважає гравітаційному колапсу. Таку матерію доцільно описувати як вироджений ферміонний газ, який можна описати політропним рівнянням стану як у [45]

$$P = K\rho^\gamma, \quad (3.26)$$

де P — тиск виродженого електронного або нейтронного газу, K — константа, яка стане зрозумілою після вибору рівняння для опису компактної зорі, ρ — густина речовини, γ — показник політропи.

Для білих карликів доречно розглядати вироджений електронний газ, а для нейтронної зорі — вироджений нейтронний газ. Згідно з рівняннями в [45], маємо 4 рівняння стану для виродженого газу електронів та нейтронів в залежності від того, чи враховуються релятивістські ефекти, чи ні:

- Нерелятивістські електрони $\rho_{\text{cr}} < 10^6 \text{ г/см}^3$:

$$\gamma = \frac{5}{3}, \quad K = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e m_u^{5/3} \mu_e^{5/3}}, \quad (3.27)$$

- Ультрарелятивістські електрони $\rho_{\text{cr}} > 10^6 \text{ г/см}^3$:

$$\gamma = \frac{4}{3}, \quad K = \frac{3^{1/3}\pi^{2/3}}{4} \frac{\hbar c}{m_u^{4/3} \mu_e^{4/3}}, \quad (3.28)$$

- Нерелятивістські нейтрони $\rho_{\text{cr}} < 6 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3$:

$$\gamma = \frac{5}{3}, \quad K = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_n^{8/3}}, \quad (3.29)$$

- Ультрарелятивістські нейтрони $\rho_{\text{cr}} > 5 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3$:

$$\gamma = \frac{4}{3}, \quad K = \frac{3^{1/3}\pi^{2/3}}{4} \frac{\hbar c}{m_n^{4/3}}. \quad (3.30)$$

де

m_e — маса електрона,

m_n — маса нейтрона,

m_u — маса атомного ядра,

$m_B \equiv \frac{1}{n} \sum_i n_i m_i$ — середня маса баріона в ядрі,

$\mu_e = \frac{m_B}{m_u Y_e}$ — середня молекулярна маса на один електрон,

Y_e — середнє число електронів на один баріон. (3.31)

3.2.2. Рівняння Лейна-Емдена

Розмір будь-якої зорі визначається рівновагою між силою гравітації, що намагається стиснути матерію до центра, та тиском речовини та/або світла, що протидіє цьому стисненню. В компактних зорях нульової температури відсутні термоядерні реакції, і тиск створюється виродженим газом. Якщо розглянути зорі не обертаються та не мають магнітного поля, то рівняння рівноваги матиме вигляд

$$\frac{dP}{dr} + \rho \frac{Gm}{r^2} = 0, \quad (3.32)$$

де P — тиск речовини, ρ — густина, G — гравітаційна стала, m — маса речовини. Густина можна пов'язати із масою речовини за допомогою рівняння неперервності

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho r^2. \quad (3.33)$$

Взявши похідну від рівняння (3.32) та використавши (3.33) маємо

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho r^2. \quad (3.34)$$

Використаємо політропне рівняння стану (3.26) та отримаємо

$$K\gamma \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho r^2. \quad (3.35)$$

Доцільно ввести безрозмірні змінні:

$$\rho(r) = \rho_{\text{cr}} \theta^n, \quad r = R_0 \xi, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}, \quad (3.36)$$

де ρ_{cr} — густина матерії в центрі зорі, n — індекс політропи, R_0 — параметр. Рівняння прийме вигляд

$$\frac{\rho^{1/n-1}}{4\pi G R_0^2} K(n+1) \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\xi^2 \theta^n, \quad (3.37)$$

якщо обрати $R_0 = \frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_{\text{cr}}^{1/n-1}$, то рівняння зведеться до рівняння Лейна-Емдена з крайовими умовами [1]

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\xi^2 \theta^n, \quad \theta(0) = 1, \quad \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (3.38)$$

Радіус зорі визначається з умови $\theta(\xi_1) = 0$, а вираз для знаходження маси має вигляд

$$M = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_{\text{cr}}^{\frac{3-n}{2n}} \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^2 d\xi. \quad (3.39)$$

Класифікація компактних зір, описаних за допомогою політропного рівняння стану [1]

- $\rho_{\text{cr}} = [10^5; 1,4 \cdot 10^9] \text{ г/см}^3$ — білі карлики,
- $\rho_{\text{cr}} = [10^{14}; 10^{16}] \text{ г/см}^3$ — нейтронні зорі.

На рисунку 3.1 представлений розв'язок системи рівнянь (3.38). Рисунок 3.2 показує розмір зорі, розрахований на основі рівняння Лейна-Емдена (3.38), в залежності від густини матерії в її центрі.

3.2.3. Рівняння Толмена-Оппенгеймера-Волкова

Радіус нейтронних зір порівняний з гравітаційним радіусом об'єктів подібної маси, тож доречно буде вибрати рівняння стану, яке враховує релятивістські ефекти. Одним з таких рівнянь є рівняння Толмена-Оппенгеймера-Волкова [1], яке використовує метрику Шварцшильда. Так само як і в попередньому пункті, такий опис нехтує обертанням нейтронної зорі та наявністю

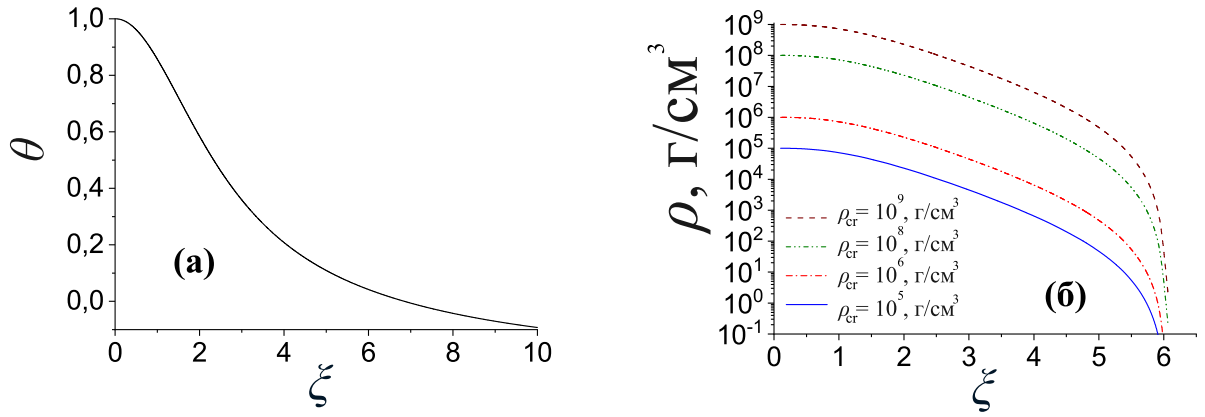


Рис. 3.1.: Залежність густини матерії зорі від відстані до центра. Результати отримані для рівняння Лейна-Емдена (3.38), враховуючи рівняння неперервності (3.33) разом з політропним рівнянням (3.26) ($n = 3$) виродженого електронного газу (3.27).

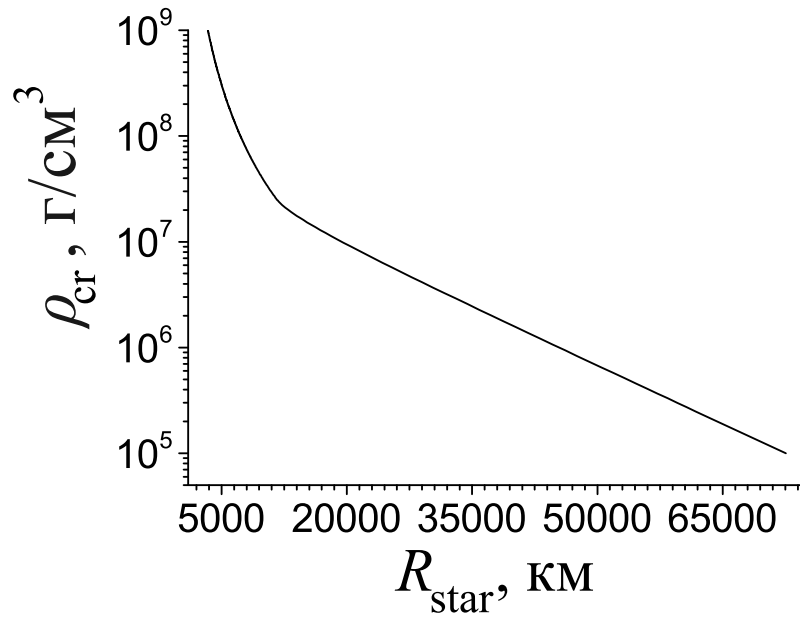


Рис. 3.2.: Залежність радіуса зорі від густини матерії ρ_{cr} в її центрі. Розрахунки проведені для рівняння Лейна-Емдена (3.38), враховуючи рівняння неперервності (3.33) разом з політропним рівнянням (3.26) ($n = 3$) виродженого електронного газу (3.27)

магнітних полів. Рівняння Толмена-Оппенгеймера-Волкова має вигляд

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G(\rho c^2 + P)(mc^2 + 4\pi Pr^3)}{r^2 c^4 - 2Gmrc^2}, \quad (3.40)$$

де c — швидкість світла. Використовуючи політропне рівняння стану (3.26) з $\gamma = \frac{1}{n} + 1$ маємо

$$\frac{dP}{dr} = \frac{d}{dr}(K\rho^\gamma) = \frac{d\rho}{dr} \frac{d(K\rho^\gamma)}{d\rho} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}, \quad (3.41)$$

а саме рівняння (3.40) прийме вигляд

$$K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} + G\rho \frac{(c^2 + K\rho^{\gamma-1})(mc^2 + 4\pi K\rho^\gamma r^3)}{r^2 c^4 - 2Gmrc^2} = 0. \quad (3.42)$$

Введемо в рівняння безрозмірні змінні (3.36)

$$K(n+1)\rho_{\text{cr}}^\gamma \theta^n \frac{d\theta}{d\xi} + G\rho_{\text{cr}} \theta^n \frac{(c^2 + K\rho_{\text{cr}}^{\gamma-1}\theta)(mc^2 + 4\pi K\rho_{\text{cr}}^\gamma \theta^{n+1} R_0^3 \xi^3)}{R_0 c^4 \xi^2 - 2Gm c^2 \xi} = 0. \quad (3.43)$$

Перегрупуємо множники й разом з рівнянням неперервності (3.33) маємо систему двох рівнянь

$$\begin{aligned} K(n+1)\rho_{\text{cr}}^\gamma \theta^n \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{G\rho_{\text{cr}} \theta^n}{R_0 c^4 \xi^2} \cdot \frac{c^2 + K\rho_{\text{cr}}^{\gamma-1}\theta}{1 - 2Gm/(R_0 c^2 \xi)} \cdot (mc^2 + 4\pi K\rho_{\text{cr}}^\gamma \theta^{n+1} R_0^3 \xi^3) &= 0, \\ \frac{dm}{d\xi} &= 4\pi\rho_{\text{cr}} \theta^n r^2 R_0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Система рівнянь в такому вигляді не зручна для чисельних розрахунків, тож введемо коефіцієнти

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{K(n+1)} \frac{G\rho_{\text{cr}}^{1-\gamma}}{R_0}, & a_1 &= K\rho_{\text{cr}}^{\gamma-1} c^{-2}, & a_2 &= 4\pi K\rho_{\text{cr}}^\gamma R_0^3 c^{-2}, \\ r_0 &= 4\pi\rho_{\text{cr}} R_0^3, & c_0 &= \frac{R_0 c^2}{2g}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

й отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{d\xi}\xi(m/c_0 - \xi) &= a_0(1 + a_1\theta)(m + a_2\theta^{n+1}\xi^3), \\ \frac{dm}{d\xi} &= r_0\theta^n\xi^2.\end{aligned}\tag{3.46}$$

Для отриманої системи рівнянь маємо крайові умови $\theta(0) = 1$, $\frac{d\theta}{d\xi}|_{\xi=0} = 0$. Розмір зорі визначається рівність $\theta(\xi_1) = 0$.

На рисунку 3.3 представлений результат розрахунків густини зорі від відстані до її центру на основі рівняння Толмена-Оппенгеймера-Волкова.

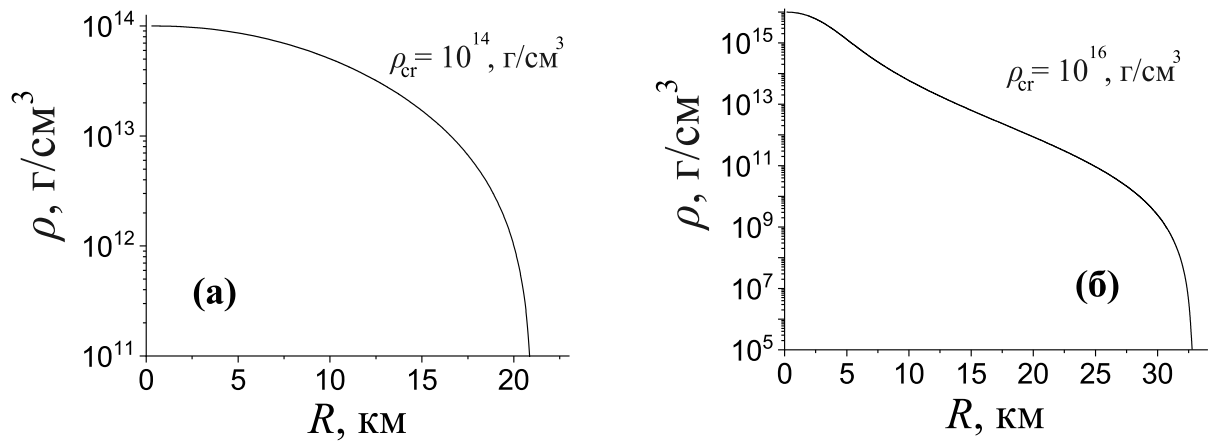


Рис. 3.3.: Залежність густини матерії зорі від відстані до центра. Результати отримані для рівняння Толмена-Оппенгеймера-Волкова (3.40), враховуючи рівняння неперервності (3.33) разом з рівнянням Чандрасекара.

3.2.4. Результати моделювання зірок та вибір моделі

На рисунку 3.4 представлено порівняння характеристик зірок в залежності від густини матерії ρ_{cr} в їх центрі, для $\rho_{cr} = 10^{14}$ г/см³, $\rho_{cr} = 10^{15}$ г/см³ та $\rho_{cr} = 10^{16}$ г/см³. Як видно з рисунка, розв'язки, отримані на основі рівнянь Лейна-Емдена (3.38) та Толмена-Оппенгеймера-Волкова (3.40) суттєво відрізняються для менших густин, особливо асимптотичною поведінкою густини у зовнішніх шарах зорі. Маємо наступні характеристики зірок:

- білий карлик з $\rho_{cr} = 10^5$ г/см³ має радіус $R = 16450$ км та масу $M = 0,175$ сонячних;

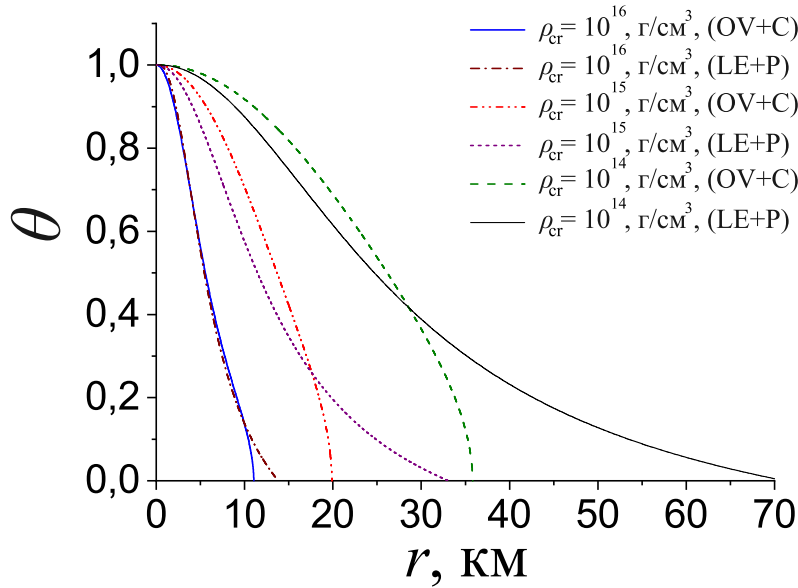


Рис. 3.4.: Порівняння поведінки густин компактних зір, побудованих на основі рівняння Лейна-Емдена (3.38) з політропним рівнянням стану (3.26), та на основі рівняння Толмена-Оппенгеймера-Волкова (3.40) разом з рівнянням Чандрасекара.

- білий карлик з $\rho_{\text{cr}} = 10^9 \text{ г/см}^3$ має радіус $R = 3150 \text{ км}$ та масу $M = 1,5$ сонячних;
- нейтронна зоря з $\rho_{\text{cr}} = 10^{14} \text{ г/см}^3$ має радіус $R = 21 \text{ км}$ та масу $M = 0,36$ сонячних;
- нейтронна зоря з $\rho_{\text{cr}} = 10^{16} \text{ г/см}^3$ має радіус $R = 33 \text{ км}$ та масу $M = 1,5$ сонячних.

Маючи результати розрахунків для $\theta(\xi)$ (представлені на рисунках 3.1 та 3.3 для рівняння Лейна-Емдена та Толмена-Оппенгеймера-Волкова відповідно) і використовуючи політропне рівняння стану (3.26), отримано залежність тиску всередині зорі від відстані до центра. Цю залежність для різних зір представлено на рисунку 3.5 (а). Аналогічні розрахунки проведені для рівняння Толмена-Оппенгеймера-Волкова (3.40).

Маючи залежність $P = P(R)$ та використовуючи рівняння (3.24) пораховано матричний елемент (3.17). Результати розрахунків представлені на рисунку 3.5 (б).

Згідно з рисунком 3.5 (б) внесок в повну енергію атомного ядра від сере-

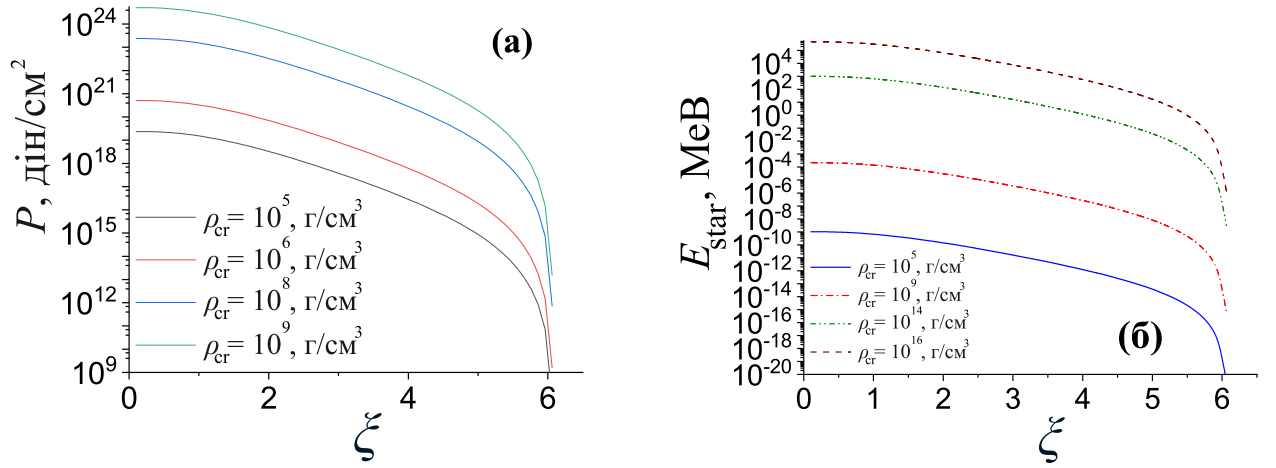


Рис. 3.5.: Залежність тиску від відстані до центра зорі, розраховано для рівняння Лейна-Емдена (3.38) (а), та внесок до повної енергії від середовища зорі згідно з рівнянням (3.17) (б), пораховані для різних густин матерії ρ_{cr} в центрі зорі.

довища білого карлика не перевищує 10^{-4} MeV, за умови що атомне ядро знаходиться в центрі зорі. Таким чином, можна зосередитися на нейтронних зорях, що описуються рівнянням Толмена-Оппенгеймера-Волкова (3.40).

3.2.5. Поведінка атомних ядер в середовищі компактних зір

З рисунка 3.5 можна зробити висновок, що вплив матерії білого карлика на енергію зв'язку атомного ядра незначний. Подальший аналіз буде проведений для нейтронних зір, що описуються рівнянням Толмена-Оппенгеймера-Волкова (3.40) з густинами в центрі від $\rho_{\text{cr}} = 10^{14}$ г/см^3 до $\rho_{\text{cr}} = 10^{16}$ г/см^3 . З того ж рисунка видно, що внесок ΔE_{star} в повну енергію ядра може перевищувати по модулю енергію зв'язку атомних ядер, тобто, можна очікувати додатну енергію зв'язку. Для атомного ядра поміщеного в таке середовище це буде означати, що нуклони більше не можуть утворювати складену систему. Чисельно розв'язуючи рівняння для енергії зв'язку атомного ядра (3.7) відносно відстані до центру зорі, буде знайдено відстань, де $B = 0$ MeV.

На рисунку 3.6 представлено повну енергію атомного ядра ^4He в залежності від осциляторного параметра a (випадок сферичної симетрії), поміщеного в нейтронну зорю з густиною в центрі $\rho_{\text{cr}} = 10^{14}$ г/см^3 на відстані $\xi = 2,42$. Від-

стань знайдена з умови, коли енергія зв'язку ядра ${}^4\text{He}$ дорівнює нулю завдяки взаємодії з середовищем зорі.

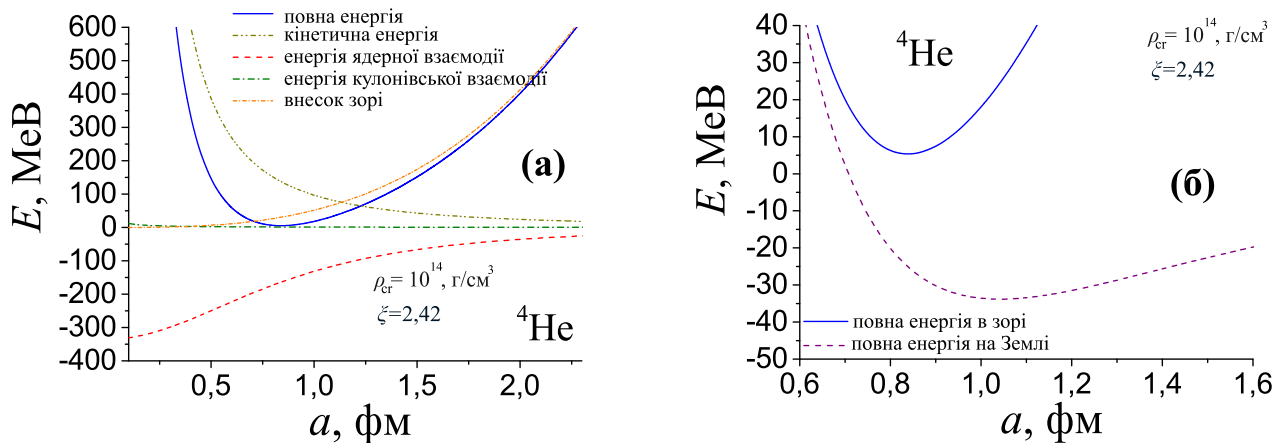


Рис. 3.6.: Вклад різних типів енергії в енергію зв'язку ${}^4\text{He}$ розрахований на глибині $\xi = 2,42$ всередині нейтронної зорі (а), та порівняння з розрахунками без впливу середовища зорі (б).

На рисунку 3.7 представлені результати розрахунків енергії зв'язку атомних ядер ${}^8\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{24}\text{Mg}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{56}\text{Fe}$ на тій же самій глибині.

Як видно з поведінки повної енергії атомних ядер, чим воно важче, тим більший вклад в повну енергію від середовища нейтронної зорі на тій же самій глибині. Іншими словами, легкі атомні ядра можуть існувати глибше всередині кори нейтронної зорі, тоді як важчі вже будуть мати додатну енергію зв'язку (тобто нуклони важких атомних ядер не можуть утворювати зв'язаний стан на такій глибині).

На рисунку 3.8 зображено відстань, на якій енергія зв'язку ${}^4\text{He}$ стає рівною нулю, в залежності від густини матерії ρ_{cr} в центрі нейтронної зорі.

3.3. Модель гальмівного випромінювання при розсіянні нуклонів на атомних ядрах в компактних зорях

В цьому підрозділі розглянемо процес розсіяння нуклона на атомному ядрі та гальмівне випромінювання, що його супроводжує. Також, використовуючи

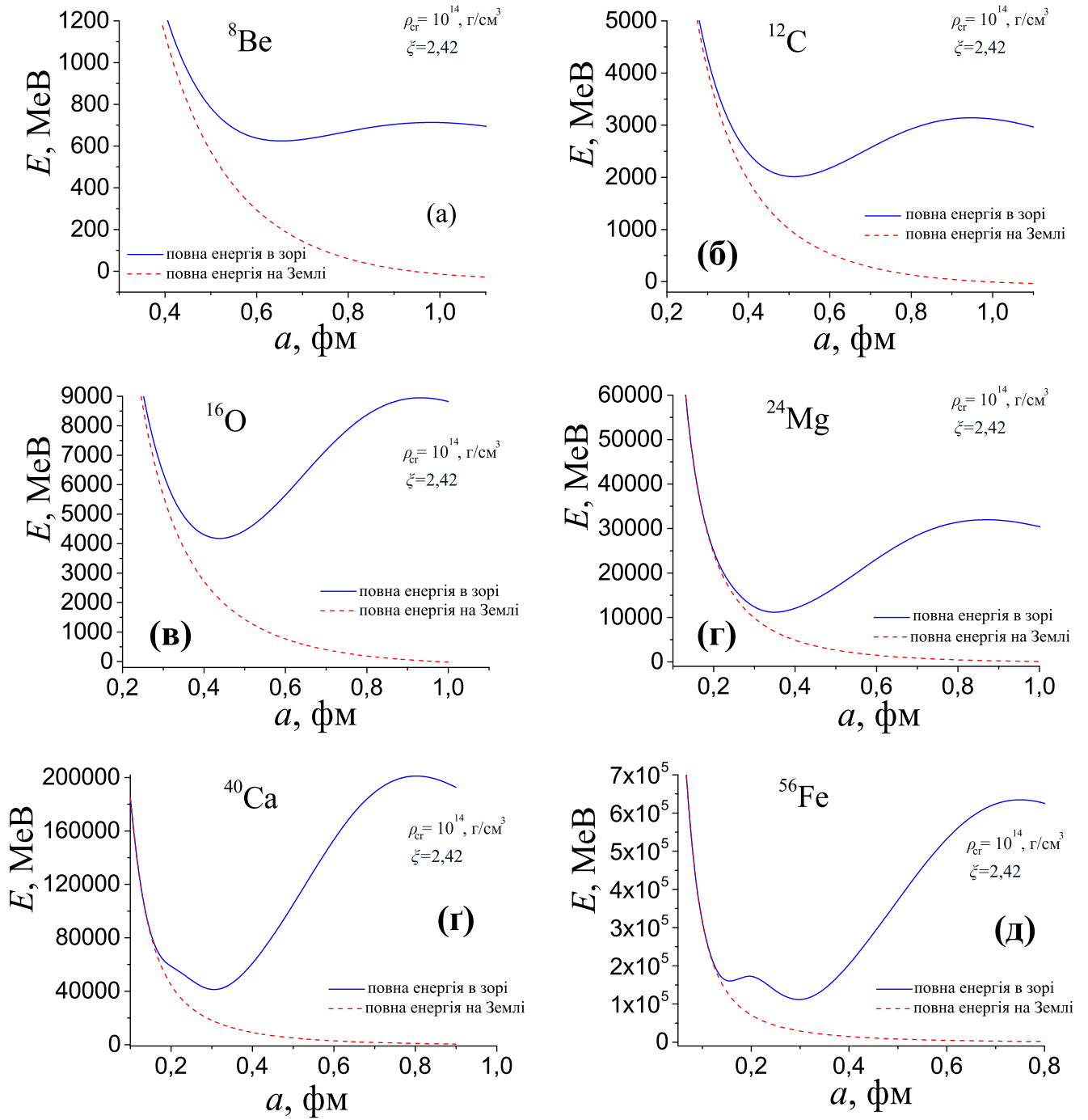


Рис. 3.7.: Енергія зв'язку атомних ядер ^8Be , ^{12}C , ^{16}O , ^{24}Mg , ^{40}Ca , ^{56}Fe всередині зорі та їх порівняння з розрахованими без впливу середовища.

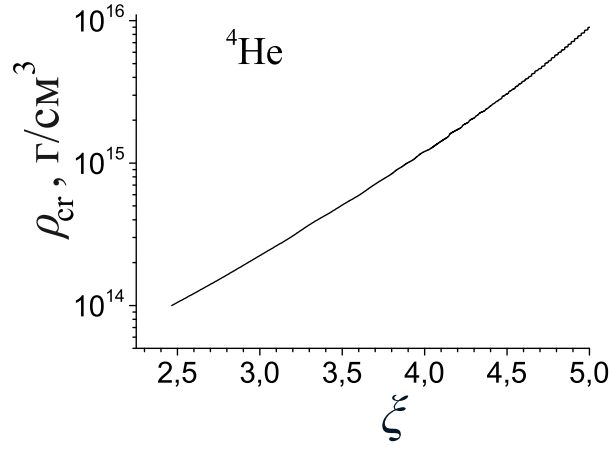


Рис. 3.8.: Відстань від центру зорі, на якій енергія зв'язку ${}^4\text{He}$ дорівнює нулю. Ядро ${}^4\text{He}$ може існувати в нейтронних зорях, якщо воно знаходиться під лінією на цьому рисунку.

здобутки попереднього підрозділу можна проаналізувати вплив матерії нейтронної зорі на спектр гальмівного випромінювання при такому процесі.

Гамільтоніан розсіяння протона на атомному ядрі, використовуючи формалізм ДОО

$$\hat{H}_0 = T_{\text{full}} + \sum_{i,j=1}^{A+1} V_{\text{DOS}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) + \sum_{i,j=1}^{A+1} V_{\text{star}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (3.47)$$

Введемо оператор народження гальмівного фотона $\hat{H}_\gamma$

$$\hat{H}_{\text{full}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_\gamma. \quad (3.48)$$

Переріз гальмівного випромінювання буде розраховуватися як в [71] з відповідним матричним елементом

$$\langle \Psi_f | \hat{H}_\gamma | \Psi_i \rangle_0 = \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\hbar \omega_{\text{ph}}}} \left\{ M_P + M_p^{(E)} + M_p^{(M)} + M_{\Delta E} + M_{\Delta M} + M_k \right\}, \quad (3.49)$$

де матричні елементи

$$\begin{aligned}
M_p^{(E, \text{dip}, 0)} &= i\hbar^2 (2\pi)^3 \frac{e}{\mu c} Z_{\text{eff}}^{(\text{dip}, 0)} \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{I}_1, \\
M_p^{(M, \text{dip}, 0)} &= -\hbar (2\pi)^3 \frac{1}{\mu} \mathbf{M}_{\text{eff}}^{(\text{dip}, 0)} \sum_{\alpha=1,2} \left[\mathbf{I}_1 \times \mathbf{e}^{(\alpha)} \right], \\
M_{\Delta E} &= 0, \\
M_{\Delta M} &= i\hbar (2\pi)^3 f_1 \cdot |\mathbf{k}_{\text{ph}}| \cdot z_A \cdot I_2, \\
M_k &= \frac{f_k}{f_1} \cdot M_{\Delta M},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

а коефіцієнти

$$f_1 = \frac{A-1}{2A} \mu_{\text{pn}}^{(\text{an})}, \quad \frac{f_k}{f_1} = -\frac{\hbar A}{A-1} \tag{3.51}$$

та інтеграли

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= \left\langle \Phi_{\text{p-nucl, f}}(\mathbf{r}) \left| e^{-i\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \frac{d}{d\mathbf{r}} \right| \Phi_{\text{p-nucl, i}}(\mathbf{r}) \right\rangle, \\
I_2 &= \left\langle \Phi_{\text{p-nucl, f}}(\mathbf{r}) \left| e^{i c_p \mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r}} \right| \Phi_{\text{p-nucl, i}}(\mathbf{r}) \right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Тут $\mathbf{r}$ — радіус-вектор від центра мас атомного ядра до протона, що на ньому розсіюється, $\mu = m_p m_A / (m_p + m_A)$ — зведена маса, A — кількість нуклонів в ядрі, $c_p = m_p / (m_p + m_A)$, $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — базисні вектори поляризації випроміненого гальмівного фотона, $\mathbf{k}_{\text{ph}}$ — хвильовий вектор фотона, $w_{\text{ph}} = k_{\text{ph}} c = |\mathbf{k}_{\text{ph}}| c$ — частота фотона, $E_{\text{ph}} = \hbar w_{\text{ph}}$ — його енергія. Вектори $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярні до $\mathbf{k}_{\text{ph}}$. Маємо дві незалежні поляризації $\mathbf{e}^{(1)}$ та $\mathbf{e}^{(2)}$ для фотона з імпульсом $\mathbf{k}_{\text{ph}}$ ($\alpha = 1, 2$). $\mu_{\text{pn}}^{(\text{an})} = \mu_p^{(\text{an})} + \mu_n^{(\text{an})}$, $\mu_p^{(\text{an})}$ та $\mu_n^{(\text{an})}$ — аномальні магнітні моменти протона та нейтрона.

Матричні елементи $M_p^{(E, \text{dip}, 0)}$ та $M_p^{(M, \text{dip}, 0)}$ описують когерентне гальмівне випромінювання електричного та магнітного типів, а елементи $M_{\Delta E}$ та $M_{\Delta M}$ — некогерентне гальмівне випромінювання цих типів відповідно. M_p пов'язаний з рухом усієї ядерної системи як цілого, яким в цьому випадку буде знехтувано. В дипольному наближенні ефективний заряд та магнітний

момент системи (тобто при $\mathbf{k}_{\text{ph}}\mathbf{r} \rightarrow 0$) набуває вигляду

$$Z_{\text{eff}}^{(\text{dip}, 0)} = \frac{m_A z_p - m_p z_A}{m_p + m_A}, \quad \mathbf{M}_{\text{eff}}^{(\text{dip}, 0)} = -\frac{m_p}{m_p + m_A} \mathbf{M}_A, \quad (3.53)$$

m_p та z_p — маса та заряд протону, m_A та z_A — маса та заряд атомного ядра. Введемо магнітний момент ядра $\mathbf{M}_A$ як

$$\mathbf{M}_A = \sum_{j=1}^A \left\langle \psi_{\text{nucl}, f}(\beta_A) \left| \mu_j^{(\text{an})} m_{Aj} \boldsymbol{\sigma} \right| \psi_{\text{nucl}, i}(\beta_A) \right\rangle, \quad (3.54)$$

де $\mu_j^{(\text{an})}$ — аномальний магнітний момент протона чи дейтрона в атомному ядрі, m_{Aj} — маса нуклона з номером j в ядрі, $\boldsymbol{\sigma}$ — оператор спіну.

3.3.1. Модифікація гамільтоніану на основі теорії збурень

Для аналізу впливу середовища зорі на гальмівне випромінювання, що супроводжує процес розсіяння нуклона на атомному ядрі, застосуємо теорію збурень. В такому випадку гамільтоніан народження фотону матиме вигляд

$$\hat{H}_{\gamma \text{new}} = \hat{H}_{\gamma 0} + \Delta \hat{H}_{\gamma}, \quad \Delta \hat{H}_{\gamma} = \sum_{i,j=1}^{A+1} V_{\text{star}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (3.55)$$

Матричний елемент випромінювання в зорі буде наступним

$$\langle \Psi_f | \hat{H}_{\gamma} | \Psi_i \rangle_{\text{star}} = \langle \Psi_f | \hat{H}_{\gamma} | \Psi_i \rangle_0 + \langle \Psi_f | \Delta \hat{H}_{\gamma} | \Psi_i \rangle. \quad (3.56)$$

Згідно з теорією збурень, перша поправка визначається двома незбуреними хвильовими функціями, тобто беремо їх як в рівнянні (3.49)

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \Delta \hat{H}_{\gamma} | \Psi_i \rangle &= \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\hbar \omega_{\text{ph}}}} \cdot M_{\text{star}}(E_{\text{ph}}), \\ M_{\text{star}}(E_{\text{ph}}) &= N \cdot F_P(R) \cdot \int \varphi_{\text{p-nucl}}^2(\mathbf{r}, k_f) \varphi_0^2(\mathbf{r}) |\mathbf{r}| d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

де сила

$$F_P(R) = P(R) = K \cdot \rho^\gamma(R). \quad (3.58)$$

Тут $\varphi_{\text{p-nucl}}(\mathbf{r}, k_f)$ — хвильова функція розсіяного фотона на атомному ядрі (має неперервний енергетичний спектр), $\varphi_0(\mathbf{r})$ — хвильова функція атомного ядра (має дискретний енергетичний спектр).

Для ${}^4\text{He}$ матимемо

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{r}) &= \varphi_{n_x=0}(x) \cdot \varphi_{n_y=0}(y) \cdot \varphi_{n_z=0}(z), \\ \varphi_{n_x=0}(x) &= \frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{2a^2}\right\}}{\pi^{1/4} \sqrt{2^{n_x} n_x!} \sqrt{a}} \cdot H_{n_x=0}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{2a^2}\right\}}{\pi^{1/4} \sqrt{a}}, \quad N = 12. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Підставляючи рівняння (3.59) в (3.57) для ${}^4\text{He}$ (at $a = b = c$), матимемо

$$M_{\text{star}}(E_{\text{ph}}) = F_P(R) \cdot \frac{N}{\pi^{3/2} a^3} \int \varphi_{\text{p-nucl}}^2(\mathbf{r}, k_f) \exp\left\{-\frac{r^2}{a^2}\right\} r \, d\mathbf{r}, \quad (3.60)$$

Хвильова функція $\varphi_{\text{p-nucl}}$ руху протона відносно центру мас атомного ядра розрахована чисельно з потенціалом $V(r) = v_c(r) + v_N(r) + v_{\text{so}}(r) + v_l(r)$, де $v_c(r)$, $v_N(r)$, $v_{\text{so}}(r)$ та $v_l(r)$ — відповідно кулонівський, ядерний, спін-орбітальний та відцентровий потенціали з параметрами як у [72].

3.3.2. Аналіз гальмівного випромінювання в середовищі компактних зір

Для початку порівняємо модель та результати розрахунків з наявними експериментальними даними. Розглянемо розсіяння $p + {}^{197}\text{Au}$, дані по якому були отримані у [73]. Використовуючи розглянутий формалізм є можливість відтворити спектр з включенням когерентного та некогерентного гальмівного випромінювання. Використаємо доданки, що дають лише найбільший вклад в спектр, тобто такі з $l_i = 0$, $l_f = 1$, $l_{\text{ph}} = 1$.

Для цього використаємо як у [72, 74]

$$M_{\text{full}} = M_{\text{coh}} + M_{\text{incoh}}, \quad M_{\text{coh}} = M_p^{(E, \text{dip}, 0)}, \quad M_{\text{incoh}} = M_{\Delta M}, \quad (3.61)$$

де $M_p^{(E, \text{dip}, 0)}$ та $M_{\Delta M}$ пораховані з рівнянь (3.51).

Порівняння з експериментальними даними представлено на рисунку 3.9 (а). На (б) доданий розрахований спектр гальмівного випромінювання при розсіянні протонів на ^4He для порівняння спектрів гальмівного випромінювання при розсіянні нуклонів на легких та важких атомних ядрах в одному формалізмі.

З рисунка (б) також видно, що різниця між спектрами для ^{197}Au та ^4He дуже істотна. При розсіянні на важких атомних ядрах гальмівне випромінювання набагато інтенсивніше в порівнянні з легкими ядрами. Подібні висновки були раніше отримані при дослідженні ядерного розпаду ^{252}Cf [28, 29] на важкі уламки в порівнянні з α -розпадом [27, 75].

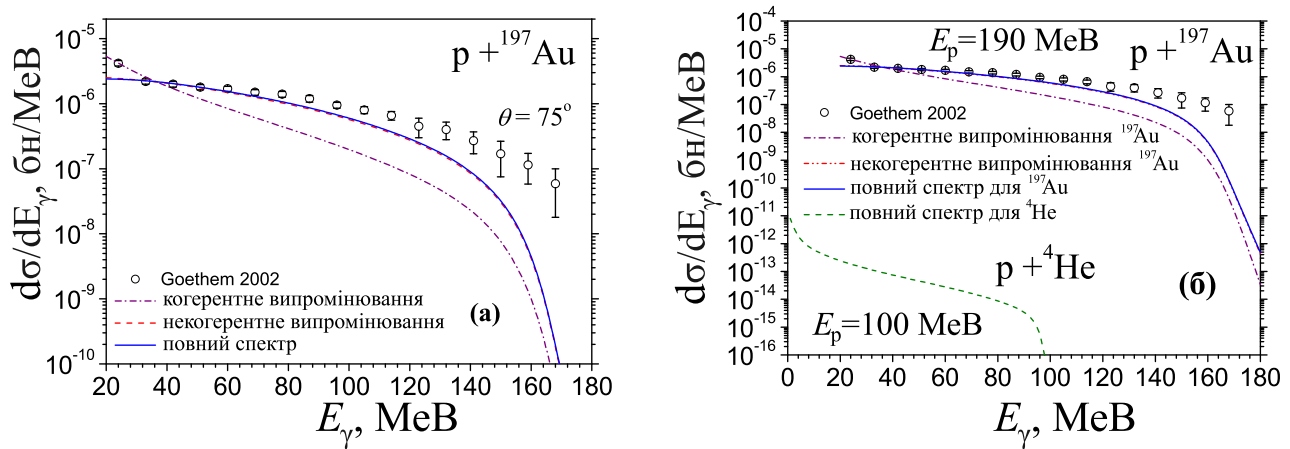


Рис. 3.9.: Порівняння спектрів гальмівного випромінювання з експериментальними даними при енергії пучка протонів $E = 190 \text{ MeV}$.

Варто зазначити, що розрахований спектр з включенням когерентного і некогерентного гальмівного випромінювання краще описує експериментальні дані в порівнянні з використанням тільки когерентного випромінювання.

Тепер можна розглянути вплив середовища компактних зір на гальмівне випромінювання при $p + ^4\text{He}$ процесі. Для цього включимо матричний елемент з рівняння (3.60). Вплив на спектр гальмівного випромінювання в цьому процесі показаний на рисунку 3.10. Як видно з рисунка (а), вплив середовища білого карлика не більше ніж $0,1 \text{ MeV}^2$, тобто інтенсивність гальмівного випромінювання при такому розсіянні практично не змінюється в порівнянні з розсіянням у вакуумі. Сонце теж в найпростішому наближенні можна описати політропним рівнянням стану, то ця модель описує гальмівне випромінювання, що виникає при розсіянні нуклонів на ядрах ^4He всередині Сонця.

На рисунку 3.10 (б) показаний вплив на спектр гальмівного випромінювання всередині нейтронних зір описаних рівнянням Толмена-Оппенгеймера-Волкова. На відміну від білих карликів, вплив середовища на спектр набагато більший. На цих рисунках F — сила з якою середовище впливає на атомне ядро, розраховане з рівняння (3.58).

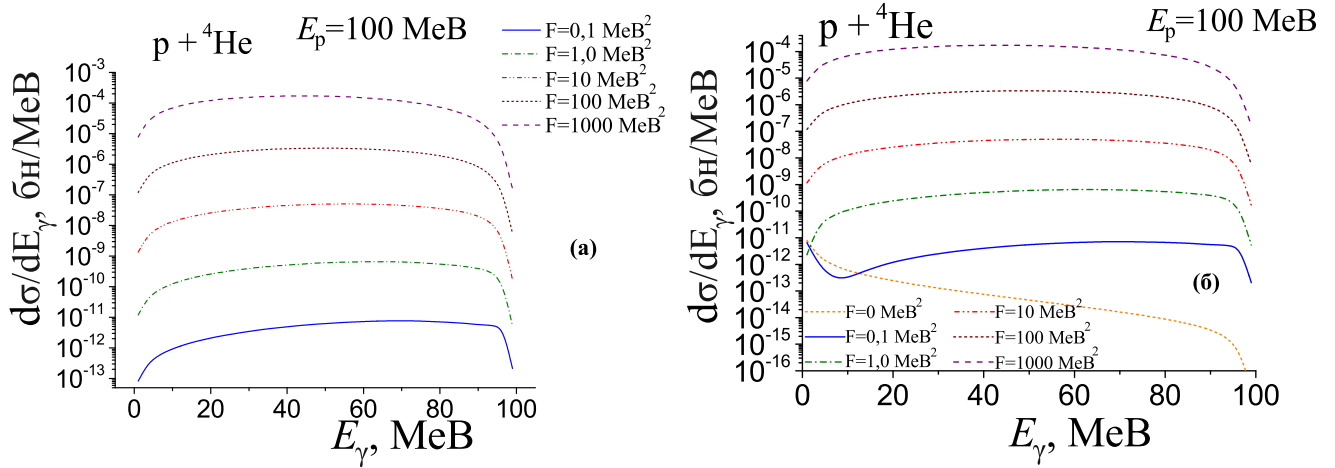


Рис. 3.10.: Вплив на спектр гальмівного випромінювання в середовищі білого карлика (а), та нейтронної зорі (б).

Результати розрахунків для розсіяння протонів на атомних ядрах ^8Be , ^{12}C , ^{16}O , ^{24}Mg , ^{40}Ca , ^{56}Fe представлені на рисунку 3.11.

Доволі просто отримати спектр для гальмівного випромінювання при розсіянні нейтронів на атомних ядрах. З рівнянь (3.49)–(3.53) випливає, що може бути некогерентне випромінювання спричинене аномальним магнітним моментом нейтрона. Отже, можна переписати матричний елемент наступним чином для розсіяння нейтронів на атомних ядрах

$$M_{\text{full}}^{(n)} = M_P + M_p^{(M)} + M_{\Delta M} + M_k + M_{\text{star}}. \quad (3.62)$$

Сpektри для розсіяння нейтрону на атомних ядрах ^4He , ^8Be , ^{12}C , ^{16}O , ^{24}Mg , ^{40}Ca , ^{56}Fe в середовищі нейтронної зорі представлені на рисунку 3.12.

3.4. Висновки до розділу 3

В цьому розділі було поєднано формалізм гальмівного випромінювання [71, 72] з моделлю деформованих осциляторних оболонок [69, 70, 76] для опису

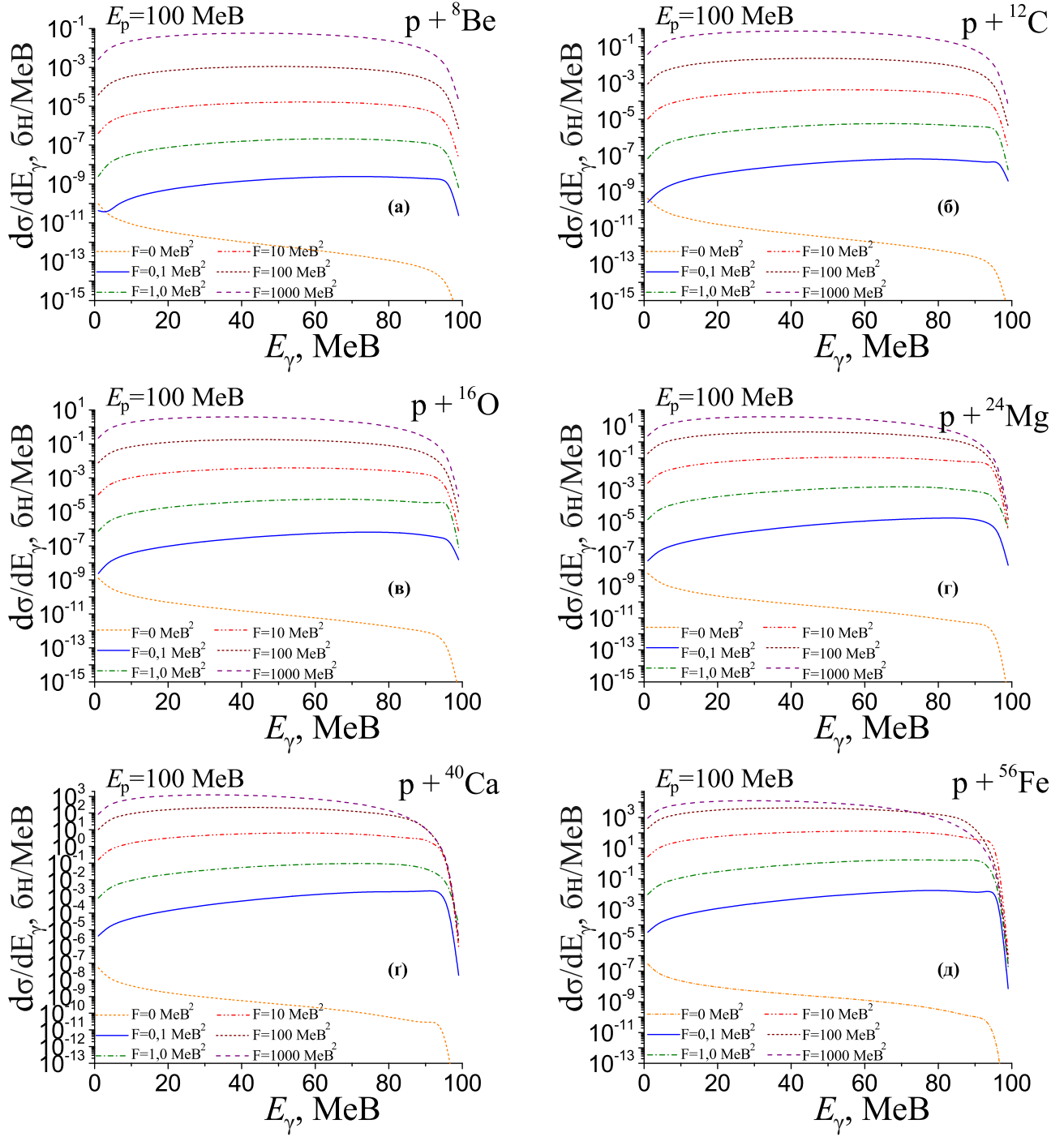


Рис. 3.11.: Спектри гальмівного випромінювання при розсіянні протонів на атомних ядрах ${}^8\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{24}\text{Mg}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{56}\text{Fe}$ в середовищі нейтронної зорі.

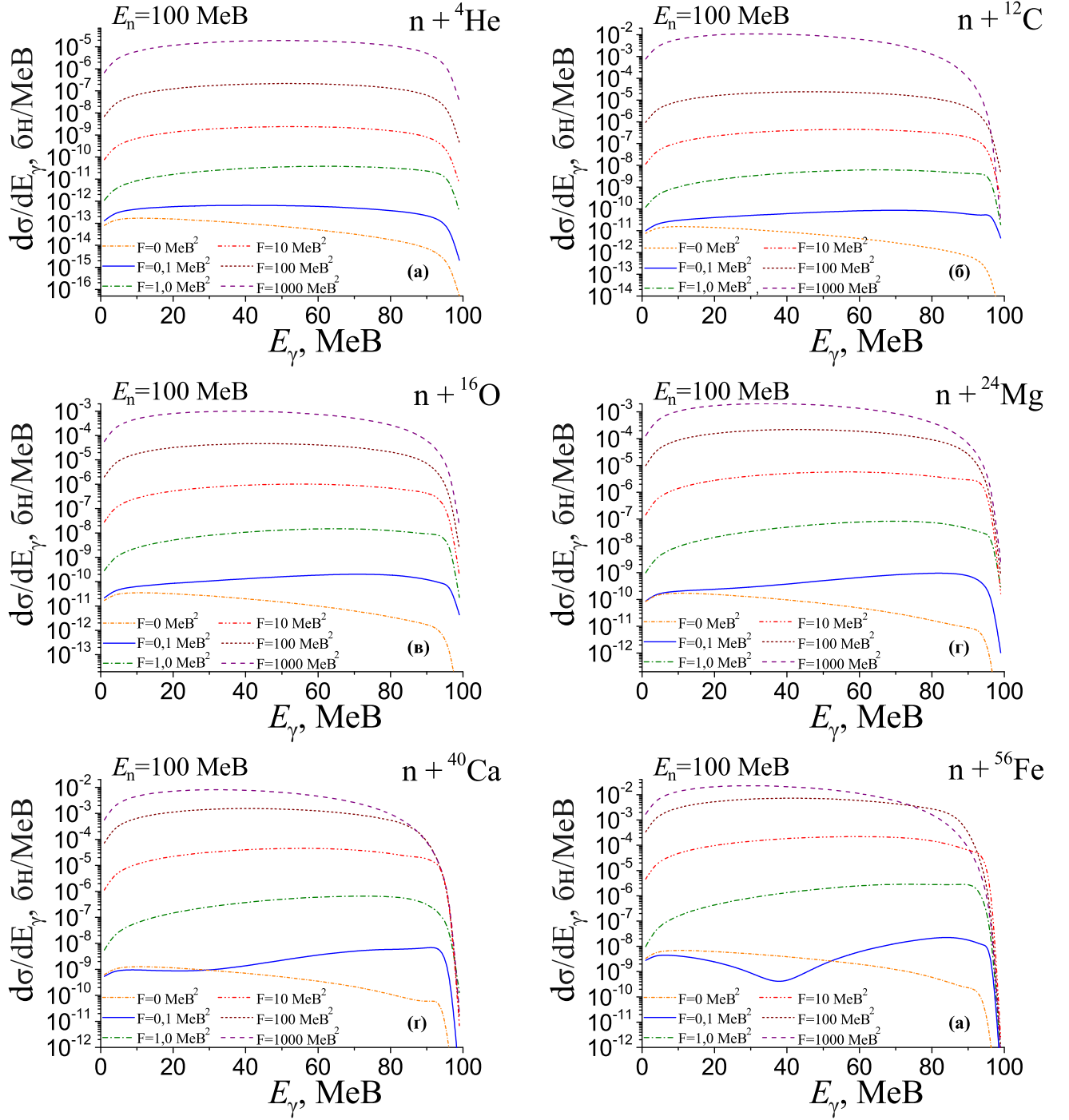


Рис. 3.12.: Спектри гальмівного випромінювання при розсіянні нейтронів на атомних ядрах ${}^8\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{24}\text{Mg}$, ${}^{40}\text{Ca}$, ${}^{56}\text{Fe}$ в середовищі нейтронної зорі.

атомних ядер в середовищі компактних зір.

Модифікована модель деформованих осциляторних оболонок з введенням потенціалу V_{star} дозволяє розрахувати енергію зв'язку в залежності від глибини знаходження атомного ядра в компактній зорі. Досліджувалися білі карлики, що описуються рівнянням Лейна-Емдена (3.38) та нейтронні зорі на основі рівняння Толмена-Оппенгеймера-Волкова (3.40). Внесок матерії білих карликів в енергію зв'язку атомного ядра нехтовний. В нейтронних зорях на енергії зв'язку атомних ядер суттєво впливає матерія зорі, як представлено на рисунках 3.6 та 3.7. Згідно з рисунком 3.8 в нейтронних зорях існує гранична відстань від центру зорі, глибше якої енергія зв'язку атомних ядер стає додатною. Для важчих ядер ця відстань більша, ніж для легких.

На основі побудованої моделі також було досліджено розсіяння нуклонів на атомних ядрах в середовищах компактних зір з урахуванням впливу матерії зорі. Розрахунки показують, що при розсіянні нуклонів на атомних ядрах всередині білих карликів спектр гальмівного випромінювання практично не відрізняється від спектрів, отриманих в експериментах на Землі. Сонце в теж можна описати політропним рівнянням стану з індексом політропи 3, тож побудована модель дозволяє розрахувати спектри гальмівного випромінювання при розсіянні нуклонів на атомних ядрах в плазмі Сонця.

При розсіянні нуклонів на атомних ядрах в нейтронних зорях, вплив матерії дуже сильно впливає на спектри гальмівного випромінювання, як показано на рисунках 3.11 та 3.12. В побудованій моделі головний вклад в спектри вносять аномальні магнітні моменти протона та дейтрона.

Висновки

У дисертаційній роботі представлено розроблені теоретичні моделі, які описують атомні ядра та ядерні реакції в екстремальних умовах компактних зір. Ціллю дослідження було отримати прості для застосування та модифікації, але достатньо точні моделі, за допомогою яких можна розраховувати властивості атомних ядер та ядерних реакцій злиття в щільних середовищах. В результаті проведених досліджень отримані наступні вагомі результати:

1. Вперше застосовано метод багаторазових внутрішніх відбиттів для опису пікноядерних реакцій між ізотопами карбону в кристалічних ґратках компактних зір. Розроблена модель дозволяє рахувати швидкості пікноядерних реакцій за енергій, раніше недосяжних для формалізмів на основі квазікласичних наближень ($E \leq 3,5$ MeV), бо побудована модель на основі методу багаторазових внутрішніх відбиттів дозволяє врахувати квантові потоки у внутрішній області потенціалу. Це зменшило оцінку швидкостей пікноядерних реакцій в $\sim 1,893$ рази. За допомогою моделі вперше можна з високою точністю розрахувати ймовірність злиття атомних ядер при пікноядерних реакціях через проміжну стадію — утворення складеного ядра. Згідно з розрахунками, ймовірність реакції злиття через утворення складеного ядра більша, ніж ймовірності злиття, розраховані на основі інших методів (наприклад, злиття атомних ядер за енергій нульових коливань): можна очікувати синтез ізотопів магнію в реакціях $^{10}\text{C} + ^{10}\text{C}$, $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ та $^{24}\text{C} + ^{24}\text{C}$, адже саме в цих реакціях енергія утвореного квазізв'язаного стану менша за висоту бар'єра потенціалу взаємодії між ядрами. Вперше досліджено вплив плазмового екранування на взаємодію двох ізотопів карбону в кристалічній ґратці, при цьому суттєво змінюється енергетичний спектр нульових коливань ядер.

2. Розроблено нову модель випромінювання гальмівних фотонів при розсіянні протона на дейтроні при енергіях відносного руху між протоном та дейтроном від нульових до 1,0 GeV (що відповідає максимальній енергії пучка дейтронів 1,5 GeV). Вперше такий процес досліджено у кластерному підході в описі розсіяння, а саме розроблено дво- та три-кластерний варіанти моделі. Виявлено, що переріз гальмівного випромінювання має залежність від параметрів кластерної моделі, що вперше дозволяє вивчати структуру дейтрона на основі аналізу перерізів гальмівного випромінювання у такому розсіянні. А саме, модель дозволяє визначити значення осциляторної довжини — параметра, що відповідає за будову дейтрона, — з аналізу спектрів гальмівного випромінювання. Модель застосовано до аналізу наявних експериментальних даних випромінювання, які отримано на циклотроні Університету Індіана у Блумінгтоні, США (cyclotron at the Indiana University Cyclotron Facility, IUCF) при енергії пучка дейтронів 145 MeV. Модель гарно описує ці експериментальні дані. Аналіз показав, що дослідження структури ядер при таких енергіях не є ефективними, тоді як вплив осциляторної довжини на спектри гальмівного випромінювання легше побачити та досліджувати за більших енергій розсіюваного пучка. Це вказує на перспективу проведення нових експериментів з цими реакціями при більших енергіях, що вперше дозволить вивчати структуру ядер таким чином експериментально.
3. Розроблено нову мікроскопічну модель, що описує властивості парно-парних атомних ядер в щільному середовищі компактних зір — білих карликів та нейтронних зір. Формалізм побудовано шляхом модифікації моделі деформованих осциляторних оболонок, яка дозволяє швидко розрахувати енергію зв'язку атомних ядер, їх деформації та розміри. Новим елементом моделі є механізм, розроблений на основі політропного рівняння стану для виродженого електронного та нейтронного газу, що дозволяє описати вплив зоряного середовища на ядро у мікроскопічному підході. Розрахунки за допомогою моделі показали істотний вплив середовища нейтронної зорі на енергію зв'язку атомних ядер. Згідно з аналізом, енергія зв'язку важчих атомних ядер (^{56}Fe , ^{40}Ca) при загли-

бленні в нейтронну зорю стає додатною ближче до поверхні, ніж енергія зв'язку легших атомних ядер (^4He , ^8Be). Отримано спектри гальмівного випромінювання при розсіянні протонів та нейтронів на ядрах в середовищі нейтронної зорі. Перерізи, розраховані на основі моделі, суттєво залежать від глибини занурення ядра в нейтронну зорю.

Теоретичне значення розробленої моделі для пікноядерних реакцій полягає в можливості врахувати квантові потоки у внутрішній області потенціалу, які не доступні для квазікласичних методів через обмеження ВКБ-наближень. Формалізм застосовний для більшого діапазону енергій взаємодіючих ядер в кристалічних ґратках компактних зір.

Значення розробленої моделі дейтрона і його взаємодії в процесі розсіяння протона на дейтроні полягає в можливості дослідити вплив параметрів моделі на процес та на гальмівне випромінювання, що його супроводжує. Порівнюючи експериментальні дані з перерізами гальмівного випромінювання з розрахунками по моделі, є можливість уточнити модель дейтрона.

Теоретичне значення моделі атомних ядер в щільному середовищі компактних зір полягає в можливості розрахувати властивості атомних ядер в такому середовищі без необхідності використовувати складні чисельні наближення та розрахунки.

ПОДЯКА

В першу чергу автор висловлює подяку захисникам України в Силах оборони України за захист країни та його народу та створення умов автору для продовження дослідницької діяльності в Україні.

Автор висловлює подяку своїм батькам, **Шаульській Тетяні Валеріївні**, за моральну підтримку та допомогу в цей важкий період, **Шаульському Андрію Володимировичу**, за підтримку, мотивацію продовжувати наукові дослідження, та за захист країни в лавах Сил оборони України.

Автор висловлює подяку колегам у відділі теорії ядерних процесів інституту ядерних досліджень та наукову спільноту, серед них:

- **Майданюку Сергію Петровичу** за цікаві поставлені задачі для досліджень, допомогу в науковій діяльності, терпіння, обговорення та мотивацію;
- **Давидовському Володимирі Володимировичу** за надання мотивації, порад та зауважень на останніх етапах навчання та роботи над дисертацією;
- **Улещенко Володимирі Васильовичу** за мотивацію продовжувати наукові дослідження, цікаві обговорення під час роботи та навчання, поради щодо наукової діяльності;
- **Василевському Віктору Семеновичу** за співпрацю над задачею, навчання новим методам, обговорення наукових задач, корисні поради;
- **Романюк Марії В'ячеславівні** за поради та цікаві обговорення;
- **Яковенко Юрію Володимировичу, Обіход Тетяні Вікторівні** та іншим викладачам, які цікаво та мотивовано показують нові та актуальні області фізики, мотивують на майбутні дослідження;
- науковій спільноті національної академії наук України з якими мав можливість працювати разом.

Автор висловлює подяку відділу аспірантури інституту ядерних досліджень за допомогу на всьому шляху під час роботи в аспірантурі.

Список використаних джерел

- [1] G. S. Bisnovaty-Kogan. *Relativistic astrophysics and physical cosmology*. Moskva, Krasand, 2011.
- [2] G. S. Bisnovaty-Kogan. *Physical problems of the theory of stellar evolution*. Moskva, Nauka, 1989.
- [3] R. Kippenhahn, A. Weigert та A. Weiss. *Stellar structure and Evolution*. Springer Berlin Heidelberg, 2nd Ed., 2012, 2012.
- [4] E. Epelbaum, H. -W. Hammer та Ulf-G. Meißner. “Modern theory of nuclear forces”. В: *Reviews of Modern Physics* 81.4 (груд. 2009), с. 1773—1825. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.1773. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.1773>.
- [5] D. R. Tilley та ін. “Energy levels of light nuclei $A = 5$, $A = 6$, $A = 7$ ”. В: *Nucl. Phys. A* 708 (2002), с. 3—163. DOI: 10.1016/S0375-9474(02)00597-3.
- [6] K. Wildermuth та Y. C. Tang. *A Unified Theory of the Nucleus*. Vieweg+Teunner Verlag Wiesbaden, 197.
- [7] Y. C. Tang, M. Lemere та D. R. Thompson. “Resonating-group method for nuclear many-body problems”. В: *Phys. Rept.* 47 (1978), с. 167—223. DOI: 10.1016/0370-1573(78)90175-8.
- [8] Y. C. Tang. *Topics in Nuclear Physics II*. Springer Berlin, Heidelberg, 1981.
- [9] Hisashi Horiuchi. “Chapter III. Kernels of GCM, RGM and OCM and their calculation methods”. В: *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 62 (1977), с. 90—190.
- [10] Y. K. Gambhir, P. Ring та A. Thimet. “Relativistic mean field theory for finite nuclei”. В: *Annals Phys.* 198 (1990), с. 132—179. DOI: 10.1016/0003-4916(90)90330-Q.

- [11] P. Ring. “Relativistic mean field in finite nuclei”. B: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 37 (1996), c. 193–263. DOI: 10.1016/0146-6410(96)00054-3.
- [12] P. Ring ta A. V. Afanasjev. “Relativistic description of high spin states”. B: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 38 (1997), c. 137–146. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0146-6410\(97\)00018-5](https://doi.org/10.1016/S0146-6410(97)00018-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641097000185>.
- [13] P. Ring. “Nuclear structure far from the valley of stability”. B: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 46.1 (2001), c. 165–174. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0146-6410\(01\)00120-X](https://doi.org/10.1016/S0146-6410(01)00120-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014664100100120X>.
- [14] P. Ring, E. Litvinova ta D. Vretenar. “Covariant density functional theory and nuclear dynamics far from stability”. B: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 59.1 (2007), c. 393–400. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2007.01.004>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641007000129>.
- [15] D. Peña Arteaga ta P. Ring. “Relativistic quasiparticle random phase approximation in deformed nuclei”. B: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 59.1 (2007), c. 314–316. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2006.12.033>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641006001116>.
- [16] T. Niksic, D. Vretenar ta P. Ring. “Relativistic Nuclear Energy Density Functionals: Mean-Field and Beyond”. B: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 66 (2011), c. 519–548. DOI: 10.1016/j.ppnp.2011.01.055. arXiv: 1102.4193 [nucl-th].
- [17] D. Vretenar ta ih. “Relativistic Hartree–Bogoliubov theory: static and dynamic aspects of exotic nuclear structure”. B: *Physics Reports* 409.3 (2005), c. 101–259. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.10.001>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157304004545>.
- [18] J. Boguta ta A. R. Bodmer. “Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface”. B: *Nuclear Physics A* 292.3 (1977), c. 413–428. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(77\)90626-1](https://doi.org/10.1016/0375-9474(77)90626-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375947477906261>.

- [19] C. L. Bai та ін. “Effect of the tensor force on the charge-exchange spin-dipole excitations of ^{208}Pb ”. B: *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010), c. 072501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.072501. arXiv: 1005.2445 [nucl-th].
- [20] G. A. Lalazissis, J. König та P. Ring. “New parametrization for the Lagrangian density of relativistic mean field theory”. B: *Physical Review C* 55.1 (січ. 1997), c. 540—543. DOI: 10.1103/PhysRevC.55.540. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.55.540>.
- [21] G. A. Lalazissis, S. Raman та P. Ring. “Ground-state properties of even-even nuclei in the relativistic mean-field theory”. B: *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 71.1 (1999), c. 1—40. DOI: <https://doi.org/10.1006/adnd.1998.0795>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0092640X98907951>.
- [22] Bruce R. Barrett, Petr Navratil та James P. Vary. “Ab initio no core shell model”. B: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 69 (2013), c. 131—181. DOI: 10.1016/j.ppnp.2012.10.003.
- [23] P. A. M. Guichon, J. R. Stone та A. W. Thomas. “Quark–Meson–Coupling (QMC) model for finite nuclei, nuclear matter and beyond”. B: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 100 (2018), c. 262—297. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2018.01.008>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641018300085>.
- [24] Vladislav S. Olkhovsky та Sergei P. Maydanyuk. “Method of multiple internal reflections in description of tunneling evolution through barriers”. B: *Ukr. J. Phys.* 45 (2000), c. 1262—1269. arXiv: nucl-th/0406035.
- [25] Sergei P. Maydanyuk, Vladislav S. Olkhovsky та Alexander K. Zaichenko. “The Method of multiple internal reflections in a description of tunneling evolution of nonrelativistic particles and photons”. B: (2002). arXiv: nucl-th/0407108.
- [26] E. E. Salpeter та H. M. van Horn. “Nuclear Reaction Rates at High Densities”. B: *Astrophysical Journal* 155 (січ. 1969), c. 183. DOI: 10.1086/149858.

- [27] S. P. Maydanyuk та ін. “Bremsstrahlung emission accompanying α -decay of deformed nuclei”. B: *Nuclear Physics A* 823.1 (2009), с. 38—46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2009.03.007>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947409001821>.
- [28] S. P. Maydanyuk та ін. “Bremsstrahlung Emission Accompanying Decays and Spontaneous Fission of Heavy Nuclei”. B: *International Journal of Modern Physics E* 19.05n06 (2010), с. 1189—1196. DOI: 10.1142/S0218301310015667. eprint: <https://doi.org/10.1142/S0218301310015667>. URL: <https://doi.org/10.1142/S0218301310015667>.
- [29] S. P. Maydanyuk та ін. “Bremsstrahlung emission of high energy accompanying spontaneous fission of ^{252}Cf ”. B: *Physical Review C* 82.1 (лип. 2010), с. 014602—. DOI: 10.1103/PhysRevC.82.014602. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.82.014602>.
- [30] Sergei Maydanyuk та Sergei Belchikov. “Problem of Nuclear Decay by Proton Emission in Fully Quantum Consideration: Calculations of Penetrability and Role of Boundary Conditions”. B: *Journal of Modern Physics* 2 (січ. 2011). DOI: 10.4236/jmp.2011.26067.
- [31] M.Ya Amusia. “"Atomic"bremsstrahlung”. B: *Physics Reports* 162.5 (1988), с. 249—335. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(88\)90025-7](https://doi.org/10.1016/0370-1573(88)90025-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157388900257>.
- [32] Carlos A. Bertulani та Gerhard Baur. “Electromagnetic processes in relativistic heavy ion collisions”. B: *Physics Reports* 163.5 (1988), с. 299—408. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(88\)90142-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(88)90142-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157388901421>.
- [33] Sergei P. Maydanyuk, Gyorgy Wolf та Kostiantyn A. Shaulskyi. “Synthesis of Elements in Compact Stars in Pycnonuclear Reactions with Carbon Isotopes: Quasibound States vs. States of Zero-Points Vibrations”. B: *Universe* 9.8 (2023), с. 354. DOI: 10.3390/universe9080354. arXiv: 2305.09389 [nucl-th].

- [34] Kostiantyn A. Shaulskyi та Sergei P. Maydanyuk. “Квантові ефекти пікно- ядерних реакцій у компактних зорях: нові квазізв’язані стани та спектроскопія”. В: *Nucl. Phys. At. Energy* 24 (2023), с. 93—105. DOI: 10 . 15407/jnpae2023.02.093.
- [35] Sergei P. Maydanyuk та Kostiantyn A. Shaulskyi. “Quantum design in study of pycnonuclear reactions in compact stars: Nuclear fusion, new quasibound states and spectroscopy”. В: *Eur. Phys. J. A* 58.11 (2022), с. 220. DOI: 10.1140/epja/s10050-022-00870-z. arXiv: 2205.13895 [nucl-th].
- [36] Kostiantyn A. Shaulskyi, Sergei P. Maydanyuk та V. S. Vasilevsky. “Structure of the deuteron from an analysis of bremsstrahlung emission in proton-deuteron scattering in cluster models”. В: *Phys Rev. C* 110 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevC.110.034001.
- [37] Sergei P. Maydanyuk, Xie Ju-Jun та Kostiantyn A. Shaulskyi. “Bremsstrahlung emission from nucleon-nucleus reactions in dense medium of compact stars”. В: *Chinese Phys. C* 49 (2025). DOI: 10.1088/1674-1137/ada377.
- [38] F. Cardone та ін. “Multiple internal reflections during particle and photon tunneling”. В: *Found. Phys. Lett.* 19 (2006), с. 441—457. DOI: 10 . 1007 / s10702-006-0903-y.
- [39] Sergei P Maydanyuk. “Multipolar model of bremsstrahlung accompanying proton decay of nuclei”. В: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 38.8 (2011), с. 085106. DOI: 10 . 1088/0954-3899/38/8/085106. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/38/8/085106>.
- [40] Sergei P. Maydanyuk, Peng-Ming Zhang та Sergei V. Belchikov. “Quantum design using a multiple internal reflections method in a study of fusion processes in the capture of alpha-particles by nuclei”. В: *Nucl. Phys. A* 940 (2015), с. 89—118. DOI: 10 . 1016 / j . nuclphysa . 2015 . 04 . 002. arXiv: 1504.00567 [nucl-th].
- [41] S. Schramm та S. E. Koonin. “Pycnonuclear Fusion Rates”. В: *Astrophysical Journal* 365 (груд. 1990), с. 296. DOI: 10.1086/169482.
- [42] Ya. B. Zeldovich та O. H. Guseynov. “Collapsed Stars in Binaries”. В: *Astrophysical Journal* 144 (трав. 1966), с. 840. DOI: 10.1086/148672.

- [43] Sergei P. Maydanyuk, Peng-Ming Zhang та Li-Ping Zou. “New quasibound states of the compound nucleus in α -particle capture by the nucleus”. B: *Phys. Rev. C* 96.1 (2017), c. 014602. DOI: 10.1103/PhysRevC.96.014602. arXiv: 1711.07012 [nucl-th].
- [44] P. Haensel та J. L. Zdunik. “Non-equilibrium processes in the crust of an accreting neutron star”. B: *Astronomy and Astrophysics* 227.2 (січ. 1990), c. 431—436.
- [45] Stuart L. Shapiro та Saul A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs and neutron stars. The physics of compact objects*. 1983. DOI: 10.1002/9783527617661.
- [46] Dima G. Yakovlev та ін. “Fusion reactions in multicomponent dense matter”. B: *Phys. Rev. C* 74 (2006), c. 035803. DOI: 10.1103/PhysRevC.74.035803. arXiv: astro-ph/0608488.
- [47] M. Beard та ін. “Astrophysical S factors for fusion reactions involving C, O, Ne, and Mg isotopes”. B: *Atom. Data Nucl. Data Tabl.* 96 (2010), c. 541—566. DOI: 10.1016/j.adt.2010.02.005. arXiv: 1002.0741 [astro-ph.SR].
- [48] Aleksandr Y Potekhin. “The physics of neutron stars”. B: *Physics Uspekhi* 53.12 (груд. 2010), c. 1235—1256. DOI: 10.3367/UFNe.0180.201012c.1279. arXiv: 1102.5735 [astro-ph.SR].
- [49] P. A. Kravchuk та D. G. Yakovlev. “Strong plasma screening in thermonuclear reactions: Electron drop model”. B: *Phys. Rev. C* 89.1 (2014), c. 015802. DOI: 10.1103/PhysRevC.89.015802. arXiv: 1401.2539 [astro-ph.SR].
- [50] E. E. Salpeter. “Electron Screening and Thermonuclear Reactions”. B: *Australian Journal of Physics* 7 (вер. 1954), c. 373.
- [51] L. D. Landau та E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics, Course of Theoretical Physics*. Oxford, UK, Pergamon, 1982.
- [52] V. A. Pluyko та V. A. Poyarkov. “Bremsstrahlung in reactions induced by protons”. B: *Phys. El. Part. At. Nucl.* 18 (1987), c. 374.
- [53] V. V. Kamanin та ін. “High-energy gamma-ray emission in heavyion reactions at nonrelativistic energies”. B: *Phys. Elem. Part. At. Nucl.* 20 (1989), c. 743.

- [54] Sergei P. Maydanyuk ta Vladislav S. Olkhovsky. “Does Sub-Barrier Bremsstrahlung in α -Decay of ^{210}Po Exist?” B: *Progress of Theoretical Physics* 109.2 (2003), c. 203—211. DOI: 10.1143/PTP.109.203. URL: <https://doi.org/10.1143/PTP.109.203>.
- [55] S. P. Maydanyuk ta V. S. Olkhovsky. “Angular analysis of bremsstrahlung in α -decay”. B: *The European Physical Journal A - Hadrons and Nuclei* 28.3 (2006), c. 283—294. DOI: 10.1140/epja/i2006-10037-5. URL: <https://doi.org/10.1140/epja/i2006-10037-5>.
- [56] S. P. Maydanyuk ta V. S. Vasilevsky. “Systematic study of bremsstrahlung emission in reactions with light nuclei in cluster models”. B: *Phys. Rev. C* 108.6 (2023), c. 064001. DOI: 10.1103/PhysRevC.108.064001. arXiv: 2304.04082 [nucl-th].
- [57] Yu. A. Lashko, G. F. Filippov ta V. S. Vasilevsky. “Dynamics of two-cluster systems in phase space”. B: *Nuclear Physics A* 941 (2015), c. 121—144. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2015.06.006>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947415001359>.
- [58] J. Clayton ta ih. “Proton-deuteron bremsstrahlung at 145 and 195 MeV”. B: *Physical Review C* 45.4 (квіт. 1992), c. 1810—1814. DOI: 10.1103/PhysRevC.45.1810. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.45.1810>.
- [59] D. R. Thompson, M. Lemere ta Y. C. Tang. “Systematic investigation of scattering problems with the resonating-group method”. B: *Nuclear Physics A* 286.1 (1977), c. 53—66. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(77\)90007-0](https://doi.org/10.1016/0375-9474(77)90007-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375947477900070>.
- [60] N. Kalzhigitov ta ih. “Resonance Structure of ^8Be within the Two-Cluster Resonating Group Method”. B: *Ukrainian Journal of Physics* 68 (бер. 2023), c. 3. DOI: 10.15407/ujpe68.1.3.
- [61] G. F. Filippov ta I. P. Okhrimenko. “Use of an oscillator basis for solving continuum problems”. B: *Sov. J. Nucl. Phys.* 32 (1981), c. 480.

- [62] G.F. Filippov. “Taking into account correct asymptotic behavior in oscillator-basis expansions”. B: *Sov. J. Nucl. Phys. (Engl. Transl.)* 33.4 (груд. 2024).
- [63] V. S. Vasilevsky та ін. “A Microscopic three-cluster model with nuclear polarization applied to the resonances of ^7Be and the reaction $^6\text{Li}(p, ^3\text{He})^4\text{He}$ ”. B: *Nucl. Phys. A* 824 (2009), с. 37—57. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2009.03.011. arXiv: 0807.0136 [nucl-th].
- [64] J. M. Eisenberg та W. Greiner. *Excitation mechanisms of the nucleus. Electromagnetic and weak interactions*. North-Holland publishing company, Amsterdam-London, 1970.
- [65] Y. N. Demkov та V. N. Ostrovskii. *Zero-Range Potentials and Their Applications in Atomic Physics*. Springer, New York, 1988.
- [66] A. B. Volkov. “Equilibrium deformation calculations of the ground state energies of 1p shell nuclei”. B: *Nuclear Physics* 74.1 (1965), с. 33—58. DOI: [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(65\)90244-0](https://doi.org/10.1016/0029-5582(65)90244-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029558265902440>.
- [67] A. Hasegawa та S. Nagata. “Ground state of ^6Li ”. B: *Prog. Theor. Phys.* 45.6 (черв. 1971), с. 1786—1807.
- [68] Fumiya Tanabe, Akihiro Toshaki та Ryoza Tamakagi. “ $\alpha\alpha$ scattering at intermediate energies”. B: *Prog. Theor. Phys.* 53.3 (лют. 1975), с. 677—691.
- [69] A. I. Steshenko. “On a model of deformed oscillator shells for calculation of bound states of atomic nuclei”. B: *Preprint, BITP, Kyiv* (1976).
- [70] A. I. Steshenko та G. F. Filippov. “Size and shape of neutron-excess nuclei”. B: *Yad. Fiz. (Sov. J. Nucl. Phys.)* 14 (1971), с. 715.
- [71] Sergei P. Maydanyuk. “Model for bremsstrahlung emission accompanying interactions between protons and nuclei from low energies up to intermediate energies: Role of magnetic emission”. B: *Physical Review C* 86.1 (лип. 2012), с. 014618—. DOI: 10.1103/PhysRevC.86.014618. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.86.014618>.

- [72] Sergei P. Maydanyuk ta Peng-Ming Zhang. “New approach to determine proton-nucleus interactions from experimental bremsstrahlung data”. B: *Physical Review C* 91.2 (лют. 2015), с. 024605—. DOI: 10.1103/PhysRevC.91.024605. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.91.024605>.
- [73] M. J. van Goethem та ін. “Suppression of Soft Nuclear Bremsstrahlung in Proton-Nucleus Collisions”. B: *Physical Review Letters* 88.12 (бер. 2002), с. 122302—. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.122302. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.122302>.
- [74] Sergei P. Maydanyuk. “Enhancement of incoherent bremsstrahlung in proton-nucleus scattering in the Δ -resonance energy region”. B: *Physical Review C* 107.2 (лют. 2023), с. 024618—. DOI: 10.1103/PhysRevC.107.024618. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.107.024618>.
- [75] Sergei P. Maydanyuk, Peng-Ming Zhang та Li-Ping Zou. “New approach for obtaining information on the many-nucleon structure in α decay from accompanying bremsstrahlung emission”. B: *Physical Review C* 93.1 (січ. 2016), с. 014617—. DOI: 10.1103/PhysRevC.93.014617. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.93.014617>.
- [76] A. I. Steshenko та G. F. Filippov. “The form of light even-even nuclei”. B: *Ukr. Phys. J.* 15 (1970).

Додаток А.

Список публікацій здобувача освіти за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. S. P. Maydanyuk, K. A. Shaulskyi, *Quantum design in study of pycnonuclear reactions in compact stars*, Eur. Phys. J. 58, 220 (2022), DOI: <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-022-00870-z> (Q2, особистий внесок здобувача — розвинення моделі багаторазових внутрішніх відбиттів та її застосування для дослідження атомних ядер в середовищі компактних зір, доповіді на наукових конференціях)
2. К. А. Шаульський, С. П. Майданюк, *Квантові ефекти пікноядерних реакцій у компактних зорях: нові квазізв'язані стани та спектроскопія*, Nucl. Phys. At. Energy 24(2), 93 (2023), DOI: <https://doi.org/10.15407/jnpae2023.02.093> (Q4, особистий внесок здобувача — розробка моделі компактних зір й адаптація методу багаторазових внутрішніх відбиттів, написання статті)
3. S. P. Maydanyuk, G. Wolf, K. A. Shaulskyi, *Synthesis of elements in compact stars in pycnonuclear reactions with Carbon isotopes: Quasibound states versus states of zero-points vibrations*, Universe, 9(8), 354 (2023), DOI: <https://doi.org/10.3390/universe9080354> (Q1, особистий внесок здобувача — розробка моделі компактних зір для дослідження пікноядерних реакцій)

кцій на основі методу багаторазових внутрішніх відбиттів, доповіді на наукових конференціях)

4. K. A. Shaulskyi, S. P. Maydanyuk, and V. S. Vasilevsky, *Structure of the deuteron from an analysis of bremsstrahlung emission in proton-deuteron scattering in cluster models*, Phys. Rev. C 110, 034001 (2024), DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.110.034001> (Q1, особистий внесок здобувача — аналітика та розрахунки хвильових функцій дейтрону, доповіді на наукових конференціях)
5. Sergei P. Maydanyuk, Ju-Jun Xie and Kostiantyn A. Shaulskyi, *Bremsstrahlung emission from nucleon-nucleus reactions in dense medium of compact stars*, Chinese Phys. C 49, 044105 (2025), DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1137/ada377> (Q1, особистий внесок здобувача — розробка моделі атомних ядер в щільному середовищі компактних зір, аналіз впливу середовища на енергію зв'язку ядер, аналіз перерізів гальмівного випромінювання, доповіді на наукових конференціях)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. С. П. Майданюк, К. А. Шаульський, *Спектроскопія пікноядерних реакцій у компактних зорях*, XXIX Щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАН України: тези доповідей (Київ, 26-30 вересня 2022 року). - Київ: Інститут ядерних досліджень НАН України, 2022. - 236 с. - С 28.
2. К. А. Шаульський, С. П. Майданюк, В. С. Василевський, *Гальмівне випромінювання у протон-дейтронному розсіянні та нуклон-нуклонні сили*, XXX Щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАН України: тези доповідей (Київ, 25-29 вересня 2023 року). - Київ: Інститут ядерних досліджень НАН України, 2023. - 246 с. - С 43.
3. Kostiantyn Shaulskyi, Sergei Maydanyuk, Victor Vasilevsky, *Bremsstrahlung emission in proton-deuteron scattering and nucleon-nucleon forces*, XIV Conference of Young Scientists "Problems of Theoretical Physics": Book of Abstracts (Kyiv, January 16-17, 2024). - Kyiv: Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 2024. - 24 p. - P 15.

4. К. А. Шаульський, С. П. Майданюк, В. С. Василевський, *Дослідження структури дейтрона з аналізу гальмівного випромінювання при протон-дейтронному розсіянні в кластерних моделях*, XXXI Щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАН України: тези доповідей (Київ, 27-31 травня 2024 року). - Київ: Інститут ядерних досліджень НАН України, 2024. - 223 с. - С 50.
5. К. А. Шаульський, С. П. Майданюк, *Гальмівне випромінювання в нуклон-ядерних реакціях у компактних зорях*, XXXII Щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАН України: тези доповідей (Київ, 26-30 травня 2025 року). - Київ: Інститут ядерних досліджень НАН України, 2025. - 209 с. - С 43.